

# **LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS EN ESPAÑA. EL MODELO DE COX, INGERSOLL Y ROSS\***

**Paz Rico**

WP-EC 98-07

Correspondencia: Universitat de València. Facultad de Ciencias Económicas.  
Depto. de Análisis Económico. Campus de los Naranjos, s/n  
46071 VALENCIA. Tel: 963 828 246

Editor: Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, S.A.  
Primera Edición Abril 1998.  
ISBN: 84-482-1734-9  
Depósito Legal: V-866-1998

Los documentos de trabajo del IVIE ofrecen un avance de resultados de las investigaciones económicas en curso, con objeto de generar un proceso de discusión previa a su remisión a las revistas científicas.

---

\* Este trabajo es parte de un capítulo de mi tesis doctoral dirigida por D. Javier Quesada Ibáñez. Quisiera agradecer a D. Ezequiel Uriel su ayuda prestada así como sus valiosos comentarios.

# **LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS EN ESPAÑA. EL MODELO DE COX, INGERSOLL Y ROSS**

**Paz Rico**

## **R E S U M E N**

En este trabajo se estima la estructura temporal de los tipos de interés, durante el período que abarca desde enero de 1991 a diciembre de 1995, aplicando el modelo intertemporal estocástico en tiempo continuo y de equilibrio general de valoración de Cox, Ingersoll y Ross utilizando los precios de los instrumentos de la deuda pública. Los resultados obtenidos indican que el modelo se ajusta bien al comportamiento de los precios de la deuda pública. No obstante, el modelo parece estimar peor los precios de los títulos con vencimiento a más largo plazo y esto es debido a la mayor distorsión fiscal que, *ceteris paribus*, presentan los títulos con mayor vencimiento.

**Palabras Clave:** Estructura temporal, modelo de equilibrio general, proceso de la dinámica del tipo de interés, deuda pública.

## **A B S T R A C T**

The one-factor version of the Cox, Ingersoll and Ross model of the term structure is estimated at monthly frequency for the 1991 to 1995 period, using public debt prices. The results obtained indicate that the model capture successfully the pattern of public debt prices. However, the model appears to fit long-term bonds prices worse than short-term bonds prices and this is due to a probable neglected tax effect.

**Key Words:** Term structure, general equilibrium model, dynamics of the interest rate process, debt public.

## 1. INTRODUCCIÓN

El análisis y obtención de la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI) constituye uno de los temas que ha merecido un mayor número de trabajos de investigación, en los últimos años, dentro de la economía financiera. La ETTI es la función que relaciona los tipos de interés libres de riesgo de insolvencia con su plazo. La importancia de la obtención de la ETTI radica en sus múltiples aplicaciones en varios campos de la economía. En el campo de la economía financiera, permite la valoración de activos financieros y el diseño de estrategias de inversión y cobertura. En teoría económica, es esencial en el estudio de temas tales como la formación de expectativas, las relaciones entre los tipos a corto y largo plazo, la transmisión de la política monetaria a las variables macroeconómicas relevantes, etc. Al Tesoro público su conocimiento le interesa por cuanto contribuye a conocer los condicionantes de su financiación y le permite diseñar correctamente su política de endeudamiento. Y por último, como indicador para la política monetaria, útil para analizar, junto con otras herramientas, las condiciones en las que ha de actuar la autoridad monetaria, las perspectivas de cumplimiento del objetivo establecido, y la percepción, por parte de los agentes, del tono de la política monetaria y del grado de confianza en su mantenimiento en el futuro.

Ahora bien, los tipos de interés al contado sólo pueden observarse a partir de activos financieros emitidos a descuento, activos que en el caso español tienen vencimiento inferior a un año<sup>1</sup>. Los tipos observados para plazos superiores contienen, generalmente, primas de liquidez, sesgo de fiscalidad y de cupón, lo cual invalida su interpretación y utilización directa o inmediata como ETTI. Ello obliga a obtener la ETTI a partir de los tipos observados mediante algún método de estimación, generalmente, utilizando los precios de la deuda pública ya que estos instrumentos están exentos de riesgo de crédito y cuentan con mercados secundarios profundos para un amplio espectro de plazos<sup>2</sup>.

El esquema 1 recoge los distintos procedimientos de estimación existentes en la literatura. En Nuñez (1995) puede el lector encontrar una referencia detallada de cada uno de ellos, a excepción de la estimación de la función de descuento por los modelos de la corriente deductiva a la que pertenece el modelo que se utiliza en este trabajo.

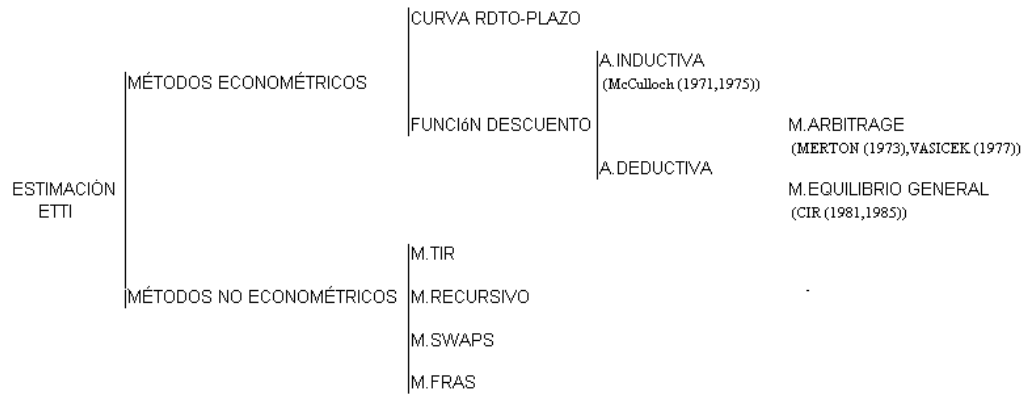
Centrándonos en la corriente deductiva, la determinación de la estructura temporal se plantea como un problema de valoración de activos de renta fija y está directamente inspirada en los modelos de fijación de precios para las opciones de Black y Scholes (1973) y en el concepto de equilibrio de la ETTI bajo incertidumbre introducido por Merton (1973a). La corriente deductiva define a priori una forma funcional de acuerdo con la cual evolucionan los tipos de interés e imponiendo una serie de restricciones se estima el valor de los parámetros, que caracterizan esta forma funcional. Cabe distinguir dos posibles variantes:

---

<sup>1</sup> A partir del 28 de abril de 1997 se emiten letras del Tesoro a 18 meses. Asimismo, recientemente han comenzado a negociarse en el mercado de deuda los denominados trips que permiten negociar por separado al principal y cada uno de los pagos intermedios de un título.

<sup>2</sup> Sin embargo, hasta 1991 el mercado español de deuda pública no es suficientemente homogéneo y líquido para permitir la estimación de la ETTI. Ello conlleva que el período muestral para el cual se estima la ETTI comience en el año 1991.

ESQUEMA 1. MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DE LA ETTI



1. Modelos de no arbitraje (Merton (1973a), Vasicek (1977), Dothan (1978), Brennan y Schwartz (1979, 1980)). Estos modelos parten de las condiciones necesarias para que no existan oportunidades de arbitraje. No especifican condiciones suficientes y el riesgo se especifica exógenamente. Los precios de los bonos a descuento dependen de un número finito de variables económicas fundamentales, denominadas variables estado, que siguen procesos estocásticos.

2. Modelos de equilibrio general (Cox, Ingersoll y Ross (1985), Longstaff (1989), Longstaff y Schwartz (1992), Platten (1994)). El modelo de valoración intertemporal de activos de Merton (1973b) y el modelo de equilibrio con expectativas racionales de Lucas (1978) llevan a los investigadores a considerar modelos de equilibrio de la ETTI. Los modelos de equilibrio general requieren, como en un modelo neoclásico, fuertes supuestos sobre preferencias, entorno y tecnología.

Los modelos de equilibrio general y de arbitraje tienen en común que ambos consideran que los tipos de interés se comportan como procesos estocásticos y los precios de los activos financieros dependen de éstos. En ambos se obtiene una ecuación diferencial que deben cumplir los precios de los activos, aunque su obtención varía de un modelo a otro. Los modelos de equilibrio general consideran la determinación de la ETTI como un problema de equilibrio general, especificando las variables de entorno que influirán en la determinación de los precios de los bonos (precio sin riesgo de crédito y de liquidez), en las propiedades estocásticas de las variables endógenamente determinadas y en la forma exacta de las primas de riesgo. La metodología basada en el arbitraje comienza con el supuesto acerca de la evolución estocástica de uno o más factores y deriva el precio de los activos imponiendo la condición de que no hay oportunidades de arbitraje en la economía. La valoración de bonos mediante esta última metodología puede, sin embargo, conducir a oportunidades de arbitraje y a inconsistencias internas en el sentido de que no puede existir un equilibrio general subyacente.

Por tanto, la metodología del equilibrio tiene claras ventajas sobre la del arbitraje, ya que la estructura temporal, su dinámica y la forma funcional del precio del riesgo son determinadas endógenamente.

En este trabajo se estima el modelo intertemporal estocástico en tiempo continuo y de equilibrio general de valoración de Cox, Ingersoll y Ross (CIR) utilizando los precios de la deuda pública durante el período que abarca desde enero de 1991 hasta diciembre de 1995. El propósito es analizar si el modelo permite explicar satisfactoriamente la formación de precios en el mercado de deuda y obtener, por tanto, la ETTI implícita en los precios de la deuda.

La estructura de este trabajo es la siguiente. A continuación se expone brevemente el modelo de CIR. En el apartado tercero se estima, en primer lugar, el proceso estocástico del tipo de interés a corto plazo con datos temporales y, en segundo lugar, los precios de la deuda pública y estructura temporal de los tipos de interés con datos de corte transversal. Por último, en el cuarto apartado se recogen las principales conclusiones.

## 2. MODELO DE EQUILIBRIO GENERAL DE CIR

CIR consideran el problema de la determinación de la ETTI como un problema de equilibrio general, y su aproximación contiene elementos de todas las teorías de la ETTI.

El modelo de CIR puede resumirse de la siguiente forma: existe un número finito de procesos productivos con rendimientos estocásticos constantes a escala que producen un sólo bien que puede destinarse a consumir o a invertir. Existe un número finito de agentes idénticos, con preferencias logarítmicas, que seleccionan el plan de consumo e inversión óptimos. Los individuos invierten en las empresas, en activos contingentes sobre el output (creados endógenamente), y el resto de su riqueza la prestan (o se endeudan) en un mercado al contado al tipo de interés de equilibrio. Los valores de las empresas siguen un proceso difusión multivariante. Se introduce el cambio tecnológico aleatorio al hacer depender el vector deriva y la matriz de covarianzas de este proceso multivariante de un vector de variables de estado, que siguen a su vez procesos difusión multivariantes. El proceso markoviano conjunto de los valores de las empresas y de las variables de estado determinan la situación de la economía en todo momento. En equilibrio, toda la riqueza se invierte en los procesos físicos y se determina el tipo de interés sin riesgo que vacía el mercado de préstamos, los precios de los activos contingentes y los planes de consumo y de producción. En concreto se obtiene un proceso difusión para el tipo de interés en función del proceso especificado para el vector de variables estado, y una ecuación en derivadas parciales que el precio de los activos contingentes (y en general, cualquier activo financiero) debe satisfacer.

El modelo de CIR supone que la dinámica del tipo de interés instantáneo viene dada por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr = k(\mu - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz \quad (1)$$

donde  $k$  es la velocidad de ajuste del tipo de interés hacia su valor de largo plazo  $\mu$ ,  $\sigma\sqrt{r}$  es la volatilidad que caracteriza la variación del tipo de interés y  $dz$  es el incremento de un proceso Wiener estándar. Esta dinámica corresponde a un proceso continuo autorregresivo de primer orden donde los movimientos aleatorios de los tipos de interés tienden hacia el valor de largo plazo  $\mu$ , y el parámetro  $k$  determina la velocidad de ajuste.

Dado el tipo de interés instantáneo  $r$  en el período  $t$ ,  $P(r,t,T)$  representa el precio de un bono emitido a descuento que vence en  $T$  y viene dado por la siguiente expresión:

$$P(r,t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r} \quad (2)$$

donde

$$\begin{aligned}
A(t, T) &= \left\{ \frac{\phi_1 \exp(\phi_2 \tau)}{\phi_2 (\exp(\phi_1 \tau) - 1) + \phi_1} \right\}^{\phi_3} \\
B(t, T) &= \frac{\exp(\phi_1 \tau) - 1}{\phi_2 (\exp(\phi_1 \tau) - 1) + \phi_1} \\
\phi_1 &= [(k + \lambda)^2 + \sigma^2]^{1/2} \\
\phi_2 &= (k + \lambda + \phi_1) / 2 \\
\phi_3 &= 2k\mu / \sigma^2 \\
\tau &= T - t
\end{aligned}$$

El parámetro  $\lambda$  es el precio de mercado del riesgo y CIR se centran en su significatividad para contrastar la hipótesis de las expectativas, de tal forma que si se obtiene un precio de mercado del riesgo significativamente distinto de cero se rechaza la hipótesis de las expectativas.

El rendimiento al vencimiento de un bono emitido a descuento que vence en T vendrá dado por la siguiente expresión:

$$R(r, t, T) = \frac{-\ln P}{T-t} = \frac{1}{T-t} B(t, T)r - \frac{1}{T-t} \ln A(t, T) \quad (3)$$

Cuando el bono se aproxima a su vencimiento, el rendimiento al vencimiento es igual a r pero si  $\tau \rightarrow \infty$ , el rendimiento no depende de r y es igual a:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(r, t, T) = (\phi_1 - \phi_2)\phi_3 \quad (4)$$

Si r es menor que la solución a largo plazo entonces la pendiente de la curva de tipos de interés es creciente. Si el tipo de interés instantáneo excede a  $\frac{k\mu}{k + \lambda}$ , la curva es decreciente (invertida). Si el tipo de interés está entre esas dos cantidades, la curva presenta una joroba, no es monótona. Hay que notar que esas dos cantidades serían iguales si  $\phi_1 = k + \lambda$  y la magnitud de  $\sigma$  sería insignificante respecto a k y  $\lambda$  con lo que es difícil observar curvas con jorobas. Esto es importante porque es compatible con el resultado tradicional de que los tipos a largo plazo reflejan las expectativas de evolución del tipo a corto (tipos actuales muy altos implica tendencia a descender y esto implica curva invertida y al revés).

El parámetro  $\sigma$  de (1) viene determinado por la relación:

$$\sigma = \sqrt{2(\phi_1 \phi_2 - \phi_2^2)} \quad (5)$$

Considerando un bono con cupón como una cartera de bonos emitidos a descuento, su precio en  $t$  vendrá dado por:

$$PB(t, c, d) = \sum_{i=1}^T c_i P(r, t, d_i) \quad (6)$$

donde  $c$  es el vector de flujos que se reciben según el vector de vencimientos  $d$ .

### 3. ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS

Los parámetros del modelo de equilibrio de CIR han sido estimados en la literatura tanto con datos de corte transversal como con datos temporales.

A partir de las expresiones (1), (2), (3) y (6) que se deducen del modelo de CIR, existen tres métodos para estimar los parámetros del modelo  $(k, \mu, \lambda, \sigma)$ . El primero consiste en estimar los parámetros del proceso continuo  $(k, \mu, \sigma)$  mediante una aproximación discreta de la ecuación diferencial (1 utilizando, como proxy del tipo de interés instantáneo sin riesgo, la serie histórica de un tipo de interés a corto plazo. Posteriormente se obtiene  $\lambda$  de (2) ó (3) al aplicar métodos no lineales.

El segundo método utiliza un panel de observaciones y estima simultáneamente los parámetros  $(k, \mu, \lambda, \sigma)$  al aplicar el método de los momentos generalizados a (3). Dado que los modelos de equilibrio implican que el tipo de interés instantáneo libre de riesgo posee una distribución estacionaria, los parámetros pueden ser estimados aplicando el método de los momentos generalizados de Hansen. Este método consiste en derivar las expresiones analíticas de los momentos de los rendimientos esperados de los activos, igualar estas expresiones a sus valores empíricos (momentos muestrales), y resolver el sistema de ecuaciones de momentos que resulta. En nuestro caso debería disponerse, a lo largo de un período determinado, de observaciones de precios cupón cero con idéntico vencimiento que permitan, como mínimo, calcular cuatro momentos muestrales (número de parámetros). Sin embargo, surgen dos problemas que obligan a descartar este método:

1. Los títulos cupón cero tienen vencimientos inferiores al año con lo que la muestra no incluiría datos del segmento a más largo plazo (títulos con vencimiento mayor al año).

2. No se poseen títulos con vencimiento residual idéntico a lo largo de un determinado período que permitan obtener un sistema de cuatro momentos muestrales.

Por último, el tercer método consiste en la estimación de corte transversal de los parámetros del modelo aplicando métodos no lineales a (6) utilizando para ello directamente los precios observados de bonos con cupón. Brown y Dybvig (1986) hacen el siguiente supuesto, el precio del bono en el momento  $t$ ,  $PB^*(\tau)$  se desvía del precio teórico en un error  $\varepsilon_t$  de media cero:



$$PB^*(\tau)=PB(\tau)+\varepsilon_t \quad (7)$$

el término de error  $\varepsilon_t$  se supone independiente e idénticamente distribuido como normal para todos los precios de bonos.

Sobre el modelo (7) es posible obtener la estimación de los parámetros aplicando mínimos cuadrados no lineales a los precios de bonos de diferentes vencimientos en un punto del tiempo. La variable dependiente es el precio de los bonos y las variables independientes son los pagos futuros y las fechas de esos pagos. Con ello, se obtienen las estimaciones de corte transversal de los parámetros del modelo.

Hay que observar que mientras el método de los momentos generalizados y el de la estimación del proceso discretizado del tipo de interés instantáneo suponen implícitamente que los parámetros del modelo son constantes en el tiempo, en este último método se obtiene una serie temporal de las estimaciones de  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  y  $r$ . Sin embargo, a diferencia de los otros dos métodos no es posible identificar separadamente las estimaciones de  $k$ ,  $\mu$  y  $\lambda$ <sup>3</sup>.

Con datos temporales es que se obtienen unos determinados valores de los parámetros del modelo para todo el período considerado, de forma que se está suponiendo implícitamente que la ETTI tiene la misma forma funcional a lo largo de todo el período. Con datos de corte transversal se obtiene una serie temporal de parámetros estimados de forma que, en cada momento, la ETTI puede presentar una forma funcional distinta. La estimación con datos temporales se interpretaría como los valores medios de los parámetros, y por tanto se estimaría una ETTI media para el período de estimación. La estimación con datos temporales de la ETTI puede ser adecuada si el objetivo es la obtención de sus determinantes pero no si el objetivo es estimar el precio de cualquier activo financiero en un momento determinado del tiempo.

La ventaja del método de estimación de corte transversal es que está basado en datos observables tales como el precio de los bonos, lo cual evita errores de medida en la variable dependiente. Asimismo, permite obtener la estimación de la serie del tipo de interés instantáneo.

En conclusión, se van a utilizar el primer y último procedimiento de forma que, lejos de ser excluyentes entre sí, sean complementarios siempre teniendo presente las limitaciones y salvedades de cada uno de ellos. El primer método permitirá obtener información sobre algún parámetro necesario en la estimación de corte transversal. El segundo procedimiento permitirá obtener el resto de parámetros y la estimación de corte transversal de la ETTI.

---

<sup>3</sup>Se tienen cuatro incógnitas y tres ecuaciones por lo que se trata de un sistema indeterminado.

### 3.1. Estimación del proceso estocástico del tipo de interés a corto plazo

Para estimar los parámetros del modelo continuo se utiliza la siguiente especificación discreta del proceso (1):

$$\begin{aligned} r_{t+1} - r_t &= k(\mu - r_t) \delta + \varepsilon_{t+1} \\ E[\varepsilon_{t+1}] &= 0 \\ E[\varepsilon_{t+1}^2] &= \sigma^2 r_t \delta \end{aligned} \quad (8)$$

donde el parámetro  $\delta$  representa la frecuencia de las observaciones en términos de unidad de tiempo elegida. Por ejemplo, para tasas anuales (la unidad de tiempo es el año) y observaciones mensuales, como es nuestro caso,  $\delta = 1/12$ <sup>4</sup>.

La especificación se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} r_{t+1} - r_t &= k^* (\mu^* - r_t) + \varepsilon_{t+1} \\ E[\varepsilon_{t+1}] &= 0 \\ E[\varepsilon_{t+1}^2] &= \sigma^{*2} r_t \end{aligned} \quad (9)$$

donde  $k^* = k\delta$ ,  $\mu^* = \mu$  y  $\sigma^{*2} = \sigma^2 \delta$ .

Este modelo discreto tiene la ventaja de permitir que la varianza de los cambios del tipo de interés dependa directamente del nivel de tipos de interés de forma consistente con el modelo continuo.

Esta especificación se puede estimar por máxima verosimilitud puesto que la función de densidad de transición del proceso Wiener  $x(t) = \varepsilon(t) + \lambda t$  viene dada por la expresión:

$$P_\lambda(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{(x - \lambda t)^2}{2t}\right] \quad (10)$$

---

<sup>4</sup>La especificación de Longstaff quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} r_{t+1} - r_t &= k(\mu - r_t^{1/2}) \delta + \varepsilon_{t+1} \\ E(\varepsilon_{t+1}) &= 0 \\ E(\varepsilon_{t+1}^2) &= \sigma^2 r_t \delta \end{aligned}$$

de forma que en nuestro caso particular<sup>5</sup> la función de densidad es:

$$P(dt,dz)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left[-\frac{(dr-\frac{1}{\sigma\sqrt{r}}-\frac{k(\mu-r)dt}{\sigma\sqrt{r}})^2}{2dt}\right] \quad (11)$$

### 3.1.1. Datos

Dado que el tipo de interés instantáneo no es una variable observable se ha utilizado una proxy del mismo. Generalmente la proxy utilizada en la literatura es el rendimiento de los Treasury Bills con vencimiento un mes (Ananthanarayanan (1980), Chan, Karolyi, Longstaff (1992), y Broze (1993)). Sin embargo, en este trabajo como proxy del tipo de interés instantáneo se ha utilizado el tipo de interés a un día de las operaciones de compraventa con pacto de recompra de las letras del Tesoro<sup>6</sup> durante el período comprendido entre enero de 1989 y diciembre de 1995.

Observando el gráfico del tipo de interés a un día se observa que se produce un cambio de tendencia a partir de abril de 1993 (ver Gráfico 1). Asimismo, el gráfico de su primera diferencia indica la presencia de heterocedasticidad.

El Cuadro 1 recoge los estadísticos descriptivos del tipo de interés a un día y su primera diferencia en todo el período considerado y en los dos subperíodos en que la muestra puede ser dividida atendiendo al cambio observado en la serie. Así, puede observarse un cambio sustancial en la media del tipo de interés y en su desviación estándar entre los dos subperíodos de la muestra. Mientras en el primer subperíodo la media se encuentra alrededor del 13%, en el segundo cae hasta el 9%. Respecto a la variabilidad de la serie, el segundo subperíodo es más volátil que el primero lo cual supone un indicio de la existencia de heterocedasticidad en la muestra.

La media de la primera diferencia en todo el período es negativa indicando que se ha producido caídas en los tipos de interés. Sin embargo, si se consideran por separado los dos subperíodos en que se puede dividir la muestra, mientras en el segundo la media de la primera diferencia presenta signo negativo, el primero presenta signo positivo lo que indicaría que durante este período los tipos de interés crecieron.

---

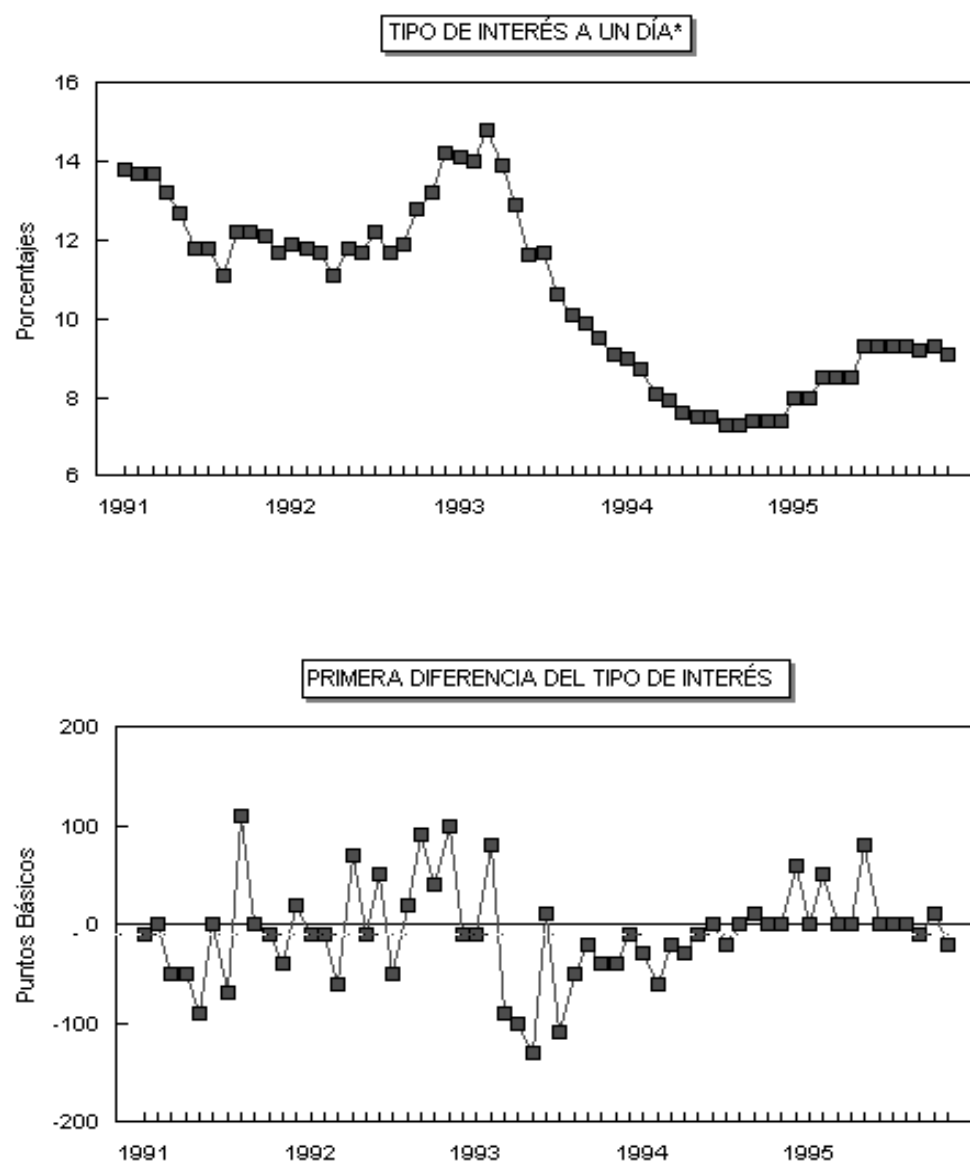
<sup>5</sup>Nuestro proceso Wiener tiene la siguiente expresión:

$$dz=dr\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{r}}\right)-\frac{k(\mu-r)dt}{\sigma\sqrt{r}}$$

donde  $E(dz)=0$  y  $E(dz^2)=dt$ .

<sup>6</sup>Para Serrat (1990) es la serie que mejor aproxima un tipo teórico sin riesgo de crédito.

GRÁFICO 1



\*Tipo de interés de las operaciones de compraventa con pacto de recompra con letras del Tesoro.

Fuente: Boletín estadístico del Banco de España.

CUADRO 1  
TIPO DE INTERÉS A UN DÍA. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS

	1989.01-1995.12		1989.01-1993.03		1993.04-1995.12	
	r	dr	r	dr	r	dr
Media	0.1145	-0.0002	0.1301	0.0007	0.0905	-0.0017
Desviación	0.0234	0.0048	0.0103	0.0049	0.0161	0.0044
Mínimo	0.0730	-0.0130	0.1110	-0.0120	0.0730	-0.0130
Máximo	0.1480	0.0110	0.1480	0.0110	0.1390	0.0080
Asimetría	-0.4381	-0.1215	-0.2374	-0.0253	1.2775	-0.5436
Kurtosis	1.7805	3.3992	1.6247	2.9667	4.3042	3.7306
Bera-Jarque	7.8927	0.7556	4.4980	0.0076	11.3152	2.3592
r(1)	0.973	0.097	0.834	-0.064	0.820	0.389
r(2)	0.942	0.284	0.734	0.200	0.670	0.484
r(3)	0.899	0.115	0.578	-0.020	0.564	0.455
r(4)	0.850	0.169	0.442	0.112	0.411	0.326
r(5)	0.795	0.063	0.320	0.101	0.303	0.305
r(6)	0.737	-0.082	0.209	-0.030	0.202	0.235

Nota: El tipo de interés a un día es el de las operaciones compraventa con pacto de recompra con letras del Tesoro.  
dr es la primera diferencia del tipo de interés a un día.

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del Boletín estadístico del Banco de España.

Respecto a los coeficientes de autocorrelación, los de los tipos de interés en niveles son elevados y caen lentamente mientras que los de sus primeras diferencias son pequeños y no presentan ningún comportamiento. Esta evidencia indica que las series de tipos de interés en niveles son no estacionarias pero sí lo son sus primeras diferencias. Por último, comentar que las primeras diferencias de los tipos de interés se distribuyen como una normal atendiendo a los estadísticos de kurtosis, asimetría y Bera-Jarque.

### **3.1.2. Resultados de la estimación**

El Cuadro 2 recoge el valor de los parámetros estimados, sus estadísticos t de Student entre paréntesis y el logaritmo de la función de verosimilitud. Como puede observarse se ha estimado el modelo en tres períodos de tiempo, el período muestral y dos subperíodos que abarcan desde enero de 1989 a marzo de 1993 y desde abril de 1993 hasta

diciembre de 1995, respectivamente. La razón de partir la muestra ha sido obtener un proceso estimado que para el conjunto de la muestra se ajusta bien a los datos pero en el que los parámetros no eran significativos. Esto hace sospechar la presencia de un cambio estructural a lo largo del período, tal y como se observa en el gráfico de la variable dependiente, que genera inestabilidad en la estimación de los parámetros. Al estimar el modelo en las dos submuestras, se obtiene que los parámetros estimados pasan a ser significativos y algunos de estos parámetros presentan cambios significativos de valor entre las dos submuestras.

CUADRO 2.  
ESTIMACIÓN DE LA DINÁMICA DEL TIPO DE INTERÉS A UN DÍA

	1989.01-1995.12	1989.01-1993.03	1993.04-1995.12
K	0,0135 (0,5038)	0,1138 (1,6821)	0,1623 (4,7479)
MEDIA	0,0943 (1,644)	0,1357 (16,021)	0,0816 (18,839)
SIGMA	0,0139 (12,811)	0,0132 (9,2517)	0,0101 (8,0163)
LOGARITMO VEROSIMILITUD	404,325	242,453	174,726

Nota: Los valores entre paréntesis son los estadísticos t-Student.

Con el fin de comprobar en que parámetros se ha producido un cambio estructural significativo se propone la siguiente especificación en la que se considera la posibilidad de un cambio estructural en cada uno de los parámetros<sup>7</sup>:

$$\begin{aligned}
 r_{t+1}-r_t &= (k^*+Dk_1)[(\mu^*+D\mu_1)-r_t] + \varepsilon_{t+1} \\
 E[\varepsilon_{t+1}] &= 0 \\
 E[\varepsilon_{t+1}^2] &= (\sigma^{*2}+D\sigma_1)r_t^\omega
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

donde D es una variable ficticia que toma valor 1 desde 1989.01 hasta 1993.03 y valor 0 desde 1993.04 hasta 1995.12, y los parámetros  $k_1$ ,  $\mu_1$  y  $\sigma_1$  son los asociados a la variable ficticia, de forma que si son significativos indicaran que se ha producido un cambio estructural en los parámetros del modelo.

<sup>7</sup>De igual forma procede Chan, K.C., G.A. Karolyi, F.A. Longstaff and A.B. Sanders (1992).

Los resultados de la estimación de esta especificación aparecen recogidos en el Cuadro 3, en el que se puede observar atendiendo al contraste razón de verosimilitud<sup>8</sup> que los parámetros asociados a la variable ficticia son significativos conjuntamente y, por tanto, se constata la existencia de cambio estructural. Por otro lado, analizando la significatividad individual de cada uno de los parámetros asociados a la variable ficticia se puede concluir que se ha producido un cambio en la volatilidad de los tipos de interés y en el nivel del tipo de interés a largo plazo  $\mu^*$ , de tal forma que ha afectado a la media de la dinámica del tipo de interés.

CUADRO 3  
ESTIMACIÓN DEL PROCESO DINÁMICO DEL TIPO DE INTERÉS A UN DÍA.  
CAMBIO ESTRUCTURAL

K	K1	MEDIA	MEDIA1	SIGMA	SIGMA1	LOGARITMO VEROSIMIL.	RV
0,1622	-0,0484	0,0816	0,0541	0,0101	0,0031	417,179	25,71
(4,7509)	(-0,6392)	(18,830)	(5,6882)	(8,0259)	(1,6398)*		

Nota: Los valores entre paréntesis son los estadísticos t-Student

\*Significativo al 10%.

RV es el contraste razón de resomilitud y su valor crítico es 7,815.

En cuanto a la estimación del precio de mercado del riesgo, es decir, del parámetro  $\lambda$ , éste puede estimarse de (2) por métodos no lineales. Sin embargo, dado que  $\lambda$  es el único parámetro a estimar, éste varía en función de la serie escogida como variable dependiente (ver Cuadro 4) lo cual es contrario al modelo de CIR donde  $\lambda$  es un parámetro y no depende del precio del activo.

La ETTI es una forma funcional cambiante en el tiempo, de forma que no sólo el nivel sino su pendiente varía. La ETTI de un período puede estar por debajo o por encima de la del período anterior, reflejando subidas o caídas generalizadas de los tipos de interés, y, asimismo, presentar una pendiente mayor o menor a la del período anterior, reflejando cambios en el diferencial de los tipos de interés a corto y largo plazo. El considerar que los parámetros del proceso estocástico del tipo de interés a corto plazo permanecen constantes a lo largo de un período, hace que toda la variación que sufre la ETTI recaiga en el único

<sup>8</sup>El contraste razón de verosimilitud (RV) viene dado por la siguiente expresión:

$$RV = -2 \left[ \ln L(\hat{\beta}_0) - \ln L(\hat{\beta}) \right]$$

donde  $\hat{\beta}_0$  es el estimador máximo verosímil en el modelo restringido y  $\hat{\beta}$  es el estimador máximo verosímil en el modelo sin restringir. Dicho contraste se distribuye asintóticamente como una  $\chi^2$  con r grados de libertad, siendo r el número de restricciones que implica la hipótesis nula.

parámetro a estimar,  $\lambda$ , el cual reflejará no sólo el precio de mercado del riesgo sino las variaciones en la pendiente de la ETTI e incluso las características propias del mercado considerado. Si a lo largo del tiempo la ETTI sólo presentara movimientos paralelos al alza o a la baja, la estimación de  $\lambda$  sería independiente del tipo de interés escogido<sup>9</sup>.

CUADRO 4  
ESTIMACIÓN DEL PRECIO DEL RIESGO

	MÉTODO NO LINEAL				MÉTODO SUR
	MIBOR 3 MESES	MIBOR 6 MESES	MIBOR 1 AÑO	LETRAS 1 AÑO	
LANDA	-0,6654 (-13,508)	-0,3837 (-11,524)	-0,2582 (-9,877)	-0,0619 (-2,265)	-0,1870 (-9,337)
LOGARITMO VEROSIMILITUD	306,990	292,629	273,866	278,356	335,039

Nota: Los valores entre paréntesis son los estadísticos t-Student.

Otra posibilidad para estimar  $\lambda$  es plantear un sistema de ecuaciones no lineales aparentemente no relacionadas (matriz de covarianzas de los residuos no diagonal) cuyo tratamiento adecuado es el método SURE no lineal multivariante de Zellner. Con este método de estimación se obtiene una única estimación del precio de mercado del riesgo, y los residuos de cada una de las series recogen lo que el modelo no puede explicar como son las características propias de cada mercado y plazo. La estimación del parámetro  $\lambda$  por el método SURE aparece recogida en el Cuadro 4 y, como puede observarse, es negativo y significativo, lo cual indica que a lo largo del período considerado ha existido una prima positiva. La obtención de esta prima positiva y significativa implica que se rechaza la teoría de las expectativas, e indica que los inversores tienen preferencia por el corto plazo.

Además de esta limitación en la estimación de  $\lambda$ , hay que tener en cuenta que este método de estimación supone que los parámetros  $k$ ,  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes a lo largo del período muestral, lo que significaría, como ya se ha comentado, que la ETTI tiene la misma forma funcional a lo largo de todo el período. Esto se encuentra muy lejos de la ser verdad dado que la ETTI es una forma funcional cambiante, y por ello la ETTI que se obtendría por este método podría, en todo caso, considerarse como la ETTI media del período. Si se quiere obtener para cada momento del tiempo la ETTI correspondiente, ha de estimarse los parámetros que en ese momento configuran la ETTI a través de la estimación de corte transversal. Este es el método que se sigue a continuación.

<sup>9</sup>Aún así, podrían existir diferencias que podrían atribuirse a posibles diferencias en la negociación de los mercados.



### 3.2. Estimación de la estructura temporal de los tipos de interés con datos de corte transversal. Modelo de CIR

El objetivo de este apartado es obtener la estimación de los parámetros  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  y del tipo de interés instantáneo del modelo de CIR, con datos de corte transversal, durante el período enero de 1991 y diciembre de 1995, aplicando mínimos cuadrados no lineales, tal y como hacen Brown y Dyvbing (1986), sobre la expresión (8)<sup>10</sup>:

La estimación de los parámetros ha presentado problemas de identificación indicando que la forma funcional del modelo de CIR está sobreparametrizada respecto de los datos. Ante la dificultad de estimar los parámetros se ha procedido, tal y como propone Serrat, a imponer el valor del parámetro  $\phi_3$  en (8). El valor del parámetro  $\phi_3 = 2k\mu/\sigma^2$  se obtiene de la estimación de  $k$ ,  $\mu$  y  $\sigma$  del proceso estocástico del tipo instantáneo realizado en el apartado anterior. Dado que en la estimación de este proceso estocástico se observa un cambio estructural en los parámetros  $\sigma$  y  $\mu$ , se obtiene un valor de  $\phi_3$  para cada uno de los subperíodos en que se divide la muestra. El valor de  $\phi_3$  es 233,46 para el período comprendido entre enero de 1991 y marzo de 1993 y de 242,95 para el período que abarca desde abril de 1993 hasta diciembre de 1995. Una vez impuesto el valor de  $\phi_3$  en (7) se procede a aplicar mínimos cuadrados no lineales para obtener  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y el tipo de interés instantáneo  $r$ <sup>11</sup>. Las razones que nos llevan adoptar esta solución son las siguientes:

1. La más obvia: poder estimar.
2. Se trata del valor medio estimado que el parámetro  $\phi_3$  tomaría en el período considerado.
3. El fijar  $\phi_3$  conlleva cometer sesgos en la estimación de corte transversal de  $\phi_1$  y  $\phi_2$  pero los valores de la ETTI estimada no se ven afectados. El precio de un bono a descuento con vencimiento en  $t$  es igual a  $e^{-y\tau}$  donde  $y$  es el tipo de interés al contado para el plazo  $\tau$ , y en el modelo de CIR el precio de ese bono es igual a  $A(\tau)e^{-rB(\tau)}$ . Las estimaciones de  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y de  $\phi_3$  deben de ser tales que la desviación al cuadrado entre esas dos expresiones del precio sean mínimas. Si se fija  $\phi_3$ , el criterio de estimación por el que se minimiza el error conlleva a que los parámetros  $\phi_1$  y  $\phi_2$  estimados sigan minimizando dicha desviación. Por tanto, fijar  $\phi_3$  supone cometer sesgos en la estimación de  $\phi_1$  y  $\phi_2$  respecto de sus verdaderos valores pero la ETTI estimada no se ve afectada. Veamos un ejemplo para entender esta afirmación. Sea  $x$  e  $y$  dos variables con 40 observaciones cada una de tal forma que están relacionadas por la siguiente función:  $y = 9e^{4x}$ . Supongamos que no se conoce la forma funcional y se estima planteándose la siguiente especificación:

$$y = (c(1)/c(2))^{c(3)} e^{(c(1)-c(2))2 \cdot X}$$

<sup>10</sup>La razón de que el período de tiempo considerado no abarque desde el año 1989, como en el apartado anterior, se debe a que con anterioridad a 1991, la poca profundidad del mercado español de deuda imposibilita la estimación de la ETTI, al menos sin presentar grandes sesgos respecto a la verdadera ETTI. A partir de 1991, el mercado español de deuda es lo suficientemente líquido para permitir la estimación de la ETTI sin dificultades.

<sup>11</sup>La diferencia con Serrat es que mientras él obtiene la estimación temporal de los parámetros restantes, aquí se utiliza un parámetro obtenido con datos temporales en una estimación de corte transversal.

Como se conoce el verdadero proceso generador de los datos, se puede calcular el valor que toman los  $c(i)$ 's, resultando  $c(1)=3$ ,  $c(2)=1$  y  $c(3)=2$ . Ahora se estima la especificación planteada y los resultados aparecen recogidos en la primera columna del Cuadro 5. Como era de esperar, los valores estimados son prácticamente iguales a los verdaderos, y el coeficiente de determinación indica que el ajuste es perfecto y los estadísticos  $t$  de Student de los parámetros indican que éstos son no significativos por problemas de identificación.

Supongamos ahora que se fija el valor del parámetro  $c(3)$  en 1,5 y se procede a estimar el modelo. Los resultados aparecen recogidos en la segunda columna del Cuadro 5. Como puede observarse, el valor de los parámetros  $c(1)$  y  $c(2)$  han variado significativamente respecto de sus verdaderos valores, sin embargo, el ajuste sigue siendo perfecto, los valores estimados de la variable dependiente son iguales a los estimados anteriormente y los estadísticos  $t$  de los parámetros indican que éstos son significativos y han desaparecido los problemas de indentificación.

CUADRO 5  
ESTIMACIÓN DE UN MODELO FIJANDO UN PARÁMETRO

	RESTRINGIDO	C(3)=1,5
C(1)	2,96 (0,22)	2,60 (6*E7)
C(2)	0,96 (0,05)	0,60 (2*E7)
C(3)	1,95 (0,53)	-
R2	1,00	1,00
D.W.	2,29	2,29

Nota: Los valores entre paréntesis son los estadísticos  $t$ -Student.

Por otro lado, obtenidos los parámetros  $\phi_1$  y  $\phi_2$  no es posible identificar separadamente los valores de  $k$ ,  $\mu$  y  $\lambda$ . Si se impusiera los valores estimados de  $k$ ,  $\mu$  y  $\sigma^2$  obtenidos de la estimación del proceso del tipo instantáneo para obtener el parámetro  $\lambda$ , toda la variación de la ETTI recaería sobre dicho parámetro. Por ello, no se puede identificar los parámetros, al menos los verdaderos valores de corte transversal de  $k$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$  y  $\sigma^2$ .

En la literatura empírica, generalmente se supone que la varianza de los residuos es proporcional al producto del precio de los bonos y su duración. Es decir, la varianza de los términos de error viene dada por la siguiente expresión:

$$E(\varepsilon_k^2) = \sigma^2 w_k \quad k=1,2,\dots,n \quad (13)$$

donde  $w_k = \left(\frac{dP_k}{dy_k}\right)^2 = (D_k P_k)^2$ , siendo  $D_k$  la duración de Macaulay del k-ésimo título e  $y_k$  la tasa de rentabilidad interna del k-ésimo título.

Sin embargo, no se ha considerado oportuno corregir directamente por heterocedasticidad los residuos sin antes comprobar la existencia de la misma. Por esta razón, en cada período se ha estimado el modelo sin suponer un comportamiento de la varianza de las perturbaciones distinto al de ruido blanco y, posteriormente, se ha comprobado si la varianza de los residuos presentaba heterocedasticidad. En aquellos casos en los que se ha detectado la presencia de heterocedasticidad en los residuos se ha corregido.

Por otro lado se ha procedido a eliminar los outliers que han surgido en la estimación siguiendo el siguiente proceso iterativo: si alguna observación presenta un residuo mayor en valor absoluto a un número de veces la desviación estándar de los residuos, la observación es eliminada de la muestra y se procede a estimar de nuevo. En los trabajos empíricos, generalmente el procedimiento seguido es el de eliminar las observaciones con un residuo superior a 2,5 veces la desviación estándar, sin embargo, nuestro criterio ha sido más estricto en el corto plazo y se ha fijado en 2 veces la desviación estándar y en 2,5 veces para el largo plazo. La razón es que se minimizan los errores en precios, y un error pequeño en precio en términos de rendimiento puede ser muy elevado, fundamentalmente en el corto plazo. No tiene la misma importancia cometer un determinado error en una observación correspondiente a un título a largo plazo que a un título a muy corto plazo puesto que en estos últimos el error en rendimiento es más grave. Veamos un ejemplo:

PLAZO	PRECIO REAL	PRECIO TEÓRICO	DIFERENCIA
1 día	0,9997	0,9996	0,0001
1 mes	0,9833	0,9832	0,0001
2 años	0,8171	0,8164	0,0006

PLAZO	RDTO REAL	RDTO TEÓRICO	DIFERENCIA
1 día	0,0828	0,1188	0,0360
1 mes	0,1010	0,1016	0,0006
2 años	0,1009	0,1014	0,0004

El error relativo depende del vencimiento del título. Cuanto mayor es el plazo menor es el error en rendimiento respecto a un determinado error en precio. En el ejemplo, entre un día y un mes, el error en precio es el mismo y sin embargo, el error que se comete en términos de rendimiento es mucho más elevado en el plazo de un día que en el plazo de un mes. El error en rendimiento es de tres puntos porcentuales en el caso de un día lo cual es un error muy grande. En el caso de dos años, el error que se comete en precios es más elevado que en los otros dos plazos y, sin embargo, el error en rendimientos es mucho más pequeño. Por ello, no es lo mismo cometer errores en el largo plazo que en el corto plazo y hay que imponer criterios más estrictos en el corto plazo.

### **3.2.1. Datos**

La Central de Anotaciones proporciona diariamente los precios medios (con y sin cupón corrido) de las operaciones compraventa simple al contado del mercado de deuda pública anotada. El período de estimación considerado abarca desde enero de 1991 a diciembre de 1995 estimándose la ETTI el último día hábil del mes. Se han tomado los precios de los bonos y obligaciones del Estado y letras del Tesoro con un saldo negociado superior a 500 millones de pesetas o, en caso de no alcanzar ese volumen, con un número de operaciones mayor a uno. De esta forma, se evita considerar títulos negociados por volúmenes reducidos o emisiones antiguas, que presentan problemas de liquidez.

Dado que para los plazos inferiores a un año, los instrumentos idóneos son las letras del Tesoro y, sin embargo, el mercado secundario de éstas es poco activo para las letras con menos de tres meses de vida, para aquellos plazos inferiores a los tres meses, se han utilizado datos procedentes de las operaciones simultáneas, que son equivalentes a instrumentos emitidos al descuento con una vida igual al plazo de la simultánea.

Con estos criterios de selección de datos se ha querido eliminar observaciones que podían introducir sesgos en la estimación. Sin embargo, en el año 1991 dada la escasez de datos, en algunos meses, y la inexistencia de operaciones simultáneas, se ha considerado las observaciones de letras con vencimientos inferiores a tres meses, para incluir datos del segmento a más corto plazo, y los títulos con volúmenes inferiores a 500 millones de pesetas. No obstante, en todos los casos, los residuos de estas observaciones han cumplido con el criterio fijado para detectar y eliminar outliers. En el resto del período se ha mantenido el criterio más restrictivo en la toma de datos. Aunque el número de datos disponibles para cada estimación puede resultar en algunos períodos bastante reducido hay que señalar, como hacen Contreras y Navarro (1993) que cada dato constituye la síntesis de un conjunto mucho más amplio ya que el precio de un bono contiene información sobre los tipos de interés al contado correspondientes al vencimiento de cada uno de los flujos que genera.

Los activos cuyo precios se determinan en los modelos de equilibrio son precios de bonos reales (en unidades de consumo). No obstante, versiones contrastadas del uso de variables nominales en las relaciones implicadas por los modelos de estructura temporal de tipos no parecen distinguirse del análisis en términos reales. Sin embargo, hay modelos donde los precios derivados en términos reales y nominales son bastante diferentes. Esto

es, sin embargo, una cuestión cuya importancia es probablemente proporcional a la longitud del período de tiempo en el que se pretenda contrastar el modelo (Serrat (1990)). Majnoni (1993) utiliza datos nominales para los bonos del Gobierno Italiano, Longstaff y Schwartz (1992) de forma consistente con otros trabajos empíricos (Brown y Dybvig (1986), Pearson y Sun (1989)) proceden a estimar el modelo usando también rendimientos nominales. Por tanto, en nuestro caso, se ha procedido a realizar las estimaciones en términos nominales.

### ***3.2.2. Resultados de la estimación***

Los resultados de la estimación de la ETTI, para el período enero de 1991-diciembre de 1995, con el modelo de equilibrio general de CIR, y siguiendo el criterio de minimización de los errores en precio al cuadrado, aparecen recogidos en el Cuadro 6, en el que se ha considerado también los dos subperíodos en que se ha dividido la muestra. Como puede observarse se produce un cambio significativo en el nivel del tipo de interés instantáneo entre el primer y segundo subperíodo de conformidad con lo observado con los tipos de interés efectivos.

El Gráfico 2 recoge la evolución del tipo de interés instantáneo estimado y el tipo de interés a un día de las operaciones de compraventa con pacto de recompra utilizado como proxy del tipo instantáneo. Como puede observarse ambas series siguen una evolución similar. Si se considera sus estadísticos descriptivos (Cuadro 7), ambos tipos de interés presentan unos niveles medios muy próximos aunque el tipo de interés instantáneo estimado presenta un nivel de variación superior. El coeficiente de correlación de ambas variables es de 0,9559 para todo el período, coeficiente que toma el valor 0,6905 y 0,9628 para el primer y segundo subperíodo respectivamente, confirmando, lo que se observa en el gráfico, que durante el primer subperíodo el tipo de interés instantáneo estimado diverge de su proxy en mayor cuantía que en el segundo subperíodo.

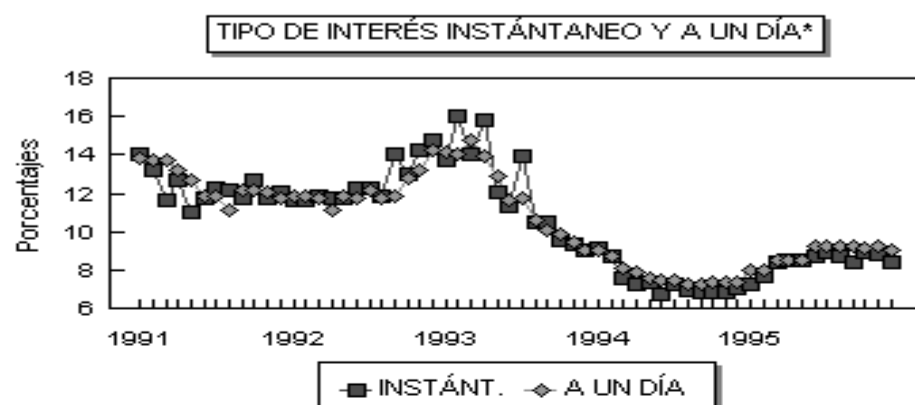
El Gráfico 2 recoge también el tipo de interés a largo plazo y el instantáneo, durante el período considerado, y puede observarse que hasta marzo de 1994 el tipo de interés a largo plazo estuvo situado por debajo del instantáneo lo que indica que la ETTI presentó pendiente negativa ('curva invertida') mientras que a partir de abril de 1994 el tipo de interés a largo plazo se sitúa por encima del instantáneo con lo que la pendiente de la ETTI presentó pendiente positiva. Estos resultados son también acordes con la evidencia empírica observada en el período.

CUADRO 6  
RESUMEN DE LOS RESULTADOS DE LAS ESTIMACIONES MENSUALES DE LA ETTI

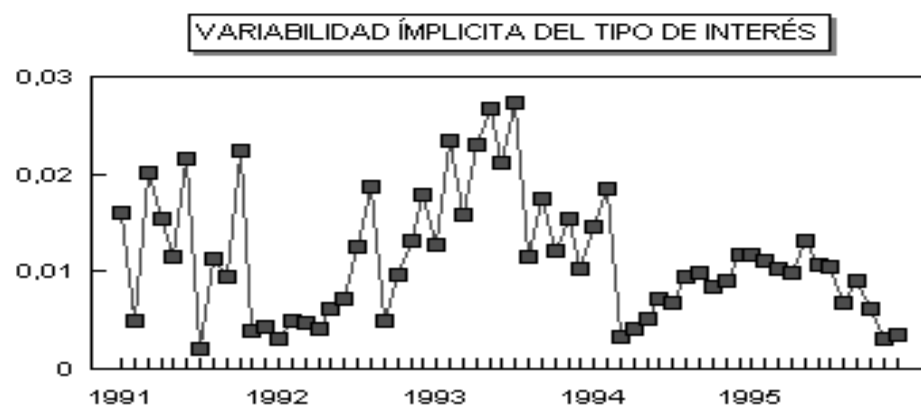
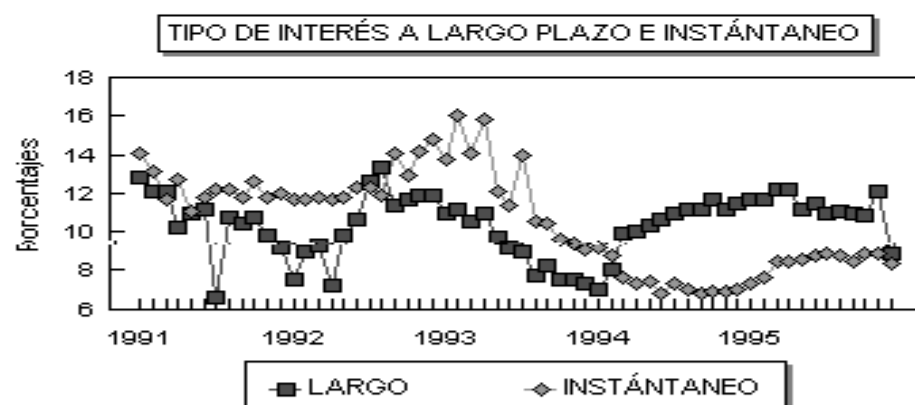
	1991.01-1995.12				1991.01-1993.03				1993.04-1995.12			
	MEDIA	DESVIACIÓN TÍPICA	MÁXIMO	MÍNIMO	MEDIA	DESVIACIÓN TÍPICA	MÁXIMO	MÍNIMO	MEDIA	DESVIACIÓN TÍPICA	MÁXIMO	MÍNIMO
F1	1,7874	1,7477	7,4033	0,5624	1,3251	1,2948	4,2990	0,5624	2,1657	1,9854	7,4033	0,1026
F2	1,7871	1,7476	7,4029	0,5595	1,3246	1,2947	4,2986	0,5595	2,1655	1,9852	7,4029	0,1021
F4=TIPO INTERÉS INSTANTANEO	0,1074	0,0255	0,1601	0,0680	0,1266	0,0120	0,1601	0,1106	0,0887	0,0204	0,1579	0,0680
SIGMA	0,0347	0,0176	0,0770	0,0056	0,0311	0,0183	0,0629	0,0056	0,0376	0,0168	0,0770	0,0101
DESVIACIÓN TIPO DE INTERÉS	0,0113	0,0064	0,0274	0,0020	0,0111	0,0067	0,0234	0,0020	0,0115	0,0063	0,0274	0,0030
TIPO DE INTERÉS A LARGO PLAZO	0,0104	0,0161	0,1331	0,0663	0,1060	0,0165	0,1331	0,0663	0,1017	0,0157	0,1215	0,0705
S.E.	0,0020	0,0023	0,0132	0,0000	0,0021	0,0024	0,0132	0,0000	0,0019	0,0022	0,0114	0,0006
S.R.Q.	0,0001	0,0003	0,0017	0,0000	0,0001	0,0003	0,0017	0,0000	0,0000	0,0002	0,0014	0,0000

Nota: S.E. y S.R.Q. son la desviación típica de los errores y la suma de los errores al cuadrado, respectivamente.

GRÁFICO 2



\*Tipo de interés de las operaciones compraventa con pacto de recompra con letras del Tesoro.



CUADRO 7  
ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DE LOS TIPOS DE INTERÉS  
INSTANTÁNEO Y A UN DÍA

	TIPO DE INTERÉS INSTANTÁNEO	TIPO DE INTERÉS A UN DÍA
MEDIA	0,1057	0,1063
DESVIACIÓN TÍPICA	0,0255	0,0223
MÁXIMO	0,1601	0,1480
MÍNIMO	0,0680	0,0730
CORRELACIÓN	0,9559	

Nota: El tipo de interés a un día es el de las operaciones compraventa con compromiso de recompra con letras del Tesoro.

Por otro lado, la variabilidad del tipo de interés instantáneo (Gráfico 2) indica que ésta es mayor en los períodos en que se han producido turbulencias en los mercados financieros internacionales como ocurrió en el segundo semestre de 1992 tras el resultado del referéndum danés sobre el Tratado de Maastricht y el primer semestre de 1993 en el que los mercados financieros y cambiarios fueron objeto de importantes ataques especulativos.

Respecto a la bondad del ajuste del modelo de CIR a la formación de precios en el mercado español de deuda pública, se ha comparado los resultados obtenidos con los de Nuñez (1995) donde realiza la estimación diaria de la ETTI, para el período comprendido entre enero de 1991 y mayo de 1995, con los métodos de McCulloch, Nelson y Siegel y Svensson. Nuñez resume, para el período comprendido entre el 3 de enero y el 23 de mayo de 1995, los resultados de sus estimaciones que son las siguientes: la suma de errores al cuadrado media es igual a 0,6 tanto con el procedimiento de Nelson y Siegel como con el de Svensson y de 0,5 con el de McCulloch; los valores máximos de la suma de errores al cuadrado son 2,2, 3,3 y 1,7 en los procedimientos de Nelson y Siegel, Svensson y McCulloch, respectivamente; y los valores mínimos obtenidos para la suma de errores al cuadrado es 0,2 en todos los casos. Aunque el período temporal no coincide, la



comparación de sus resultados con los del Cuadro 6 permite concluir que el ajuste del modelo de CIR a los precios de los títulos es más que aceptable<sup>12</sup>.

Por otro lado, atendiendo a los gráficos que recogen los precios observados y estimados por el modelo CIR para el primer y último mes de cada año, también éstos indican que el modelo ajusta bien el precio de los títulos (Gráficos 3 a 7). Hay que recordar que las observaciones están ordenadas secuencialmente de menor a mayor vencimiento por lo que se observa que el modelo ajusta peor en el tramo largo de la curva correspondiente a las observaciones de títulos de mayor vencimiento. El modelo sobrestima el precio de los títulos de mayor vencimiento y la razón es que el modelo de CIR no hace referencia a diferencias impositivas entre los activos. La estimación del modelo en general olvida las implicaciones que pueden tener las diferentes condiciones fiscales que coexisten en el mercado. La ETTI estimada, al considerar los flujos brutos, es el resultado de las condiciones fiscales medias relevantes en el mercado en el que coexisten distintas situaciones fiscales. De esta forma, los residuos recogen la presencia de costes de transacción, diferencias en la imposición fiscal y otras imperfecciones del mercado. Por tanto, como en los títulos a largo plazo la distorsión fiscal en los precios es mayor, ceteris paribus, que en los títulos a corto plazo, los residuos asociados a ellos también serán mayores. Los Gráficos 8 a 12 corresponden a las ETTI's estimadas en el primer y último mes de cada año.

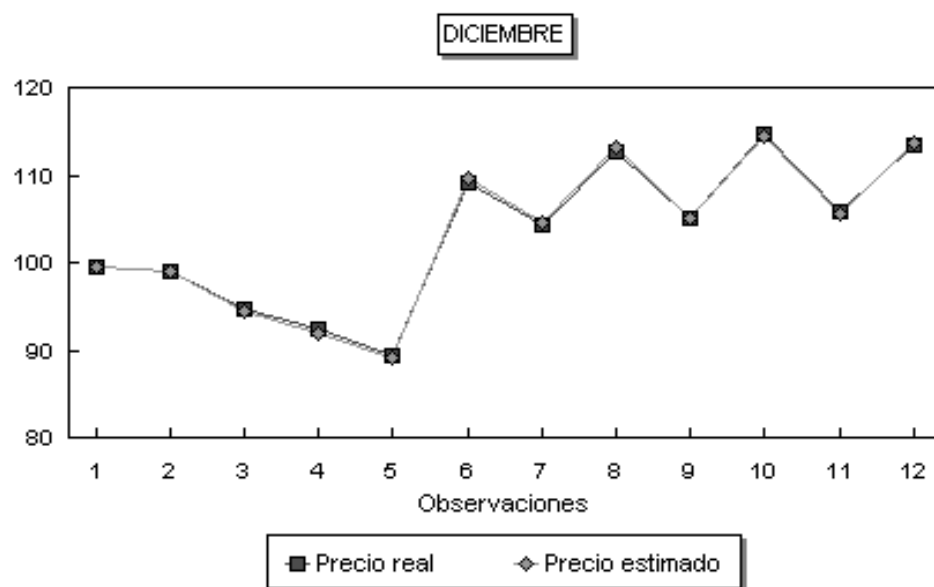
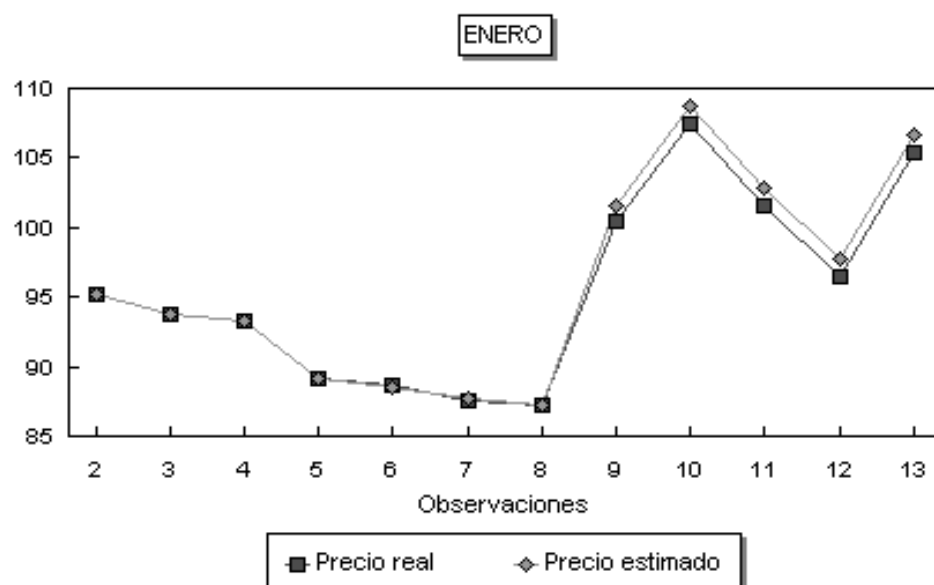
A partir de la obtención del valor de los parámetros del modelo utilizando el precio de los títulos de deuda pública se puede obtener inmediatamente los tipos de interés al contado y forward para todos los plazos que se consideren. Lo que no es posible es obtener la prima instantánea, es decir, el exceso de rentabilidad que se obtiene en un determinado plazo respecto al tipo de interés instantáneo, puesto que no se puede identificar los parámetros  $k$ ,  $\mu$  y  $\lambda$  de la estimación de  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_3$ .

Por último, y a modo de conclusión, la evidencia empírica obtenida lleva a concluir que el modelo de equilibrio de CIR se ajusta bien a los datos y por tanto, es adecuado para explicar la formación de precios en el mercado español de deuda pública y para obtener la ETTI. No obstante, es un modelo muy complejo respecto al cálculo, lo cual lo hace poco atractivo frente a otros modelos más sencillos de estimar y que presentan también un grado de ajuste elevado. Esta es la razón por la que los bancos centrales de Inglaterra y España obtengan la ETTI a través de modelos de la corriente deductiva, que permiten obtener, diariamente y de forma más sencilla y rápida la ETTI para ser utilizada como indicador en la política monetaria.

---

<sup>12</sup> Observar que para comparar estos valores con los del Cuadro 6 hay que dividirlos por 10.000, ya que la estimación de Nuñez toma los precios de los títulos en tanto por cien.

GRÁFICO 3  
PRECIOS OBSERVADOS Y ESTIMADOS. AÑO 1991



# GRÁFICO 4

## PRECIOS OBSERVADOS Y ESTIMADOS. AÑO 1992

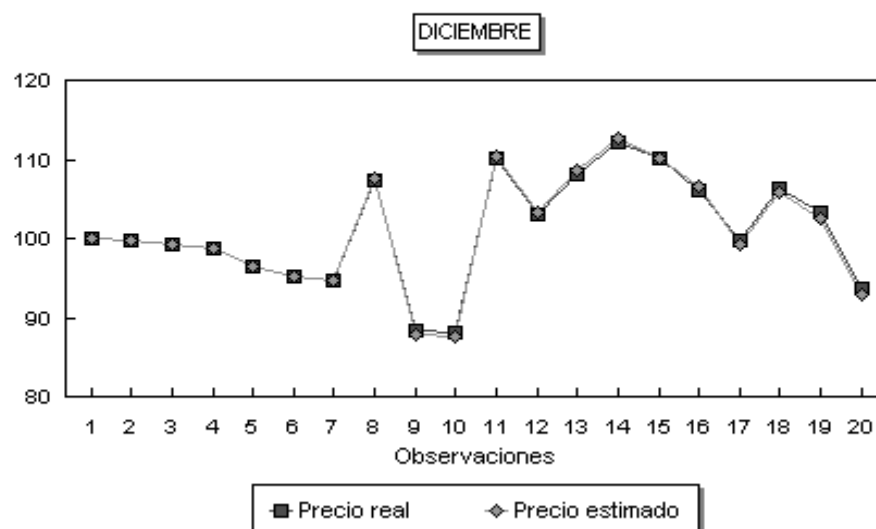
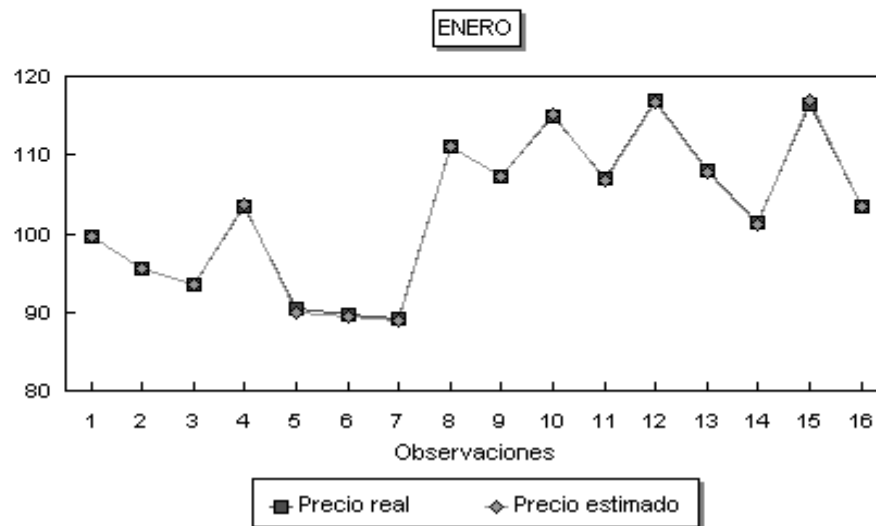


GRÁFICO 5  
 PRECIOS OBSERVADOS Y ESTIMADOS. AÑO 1993

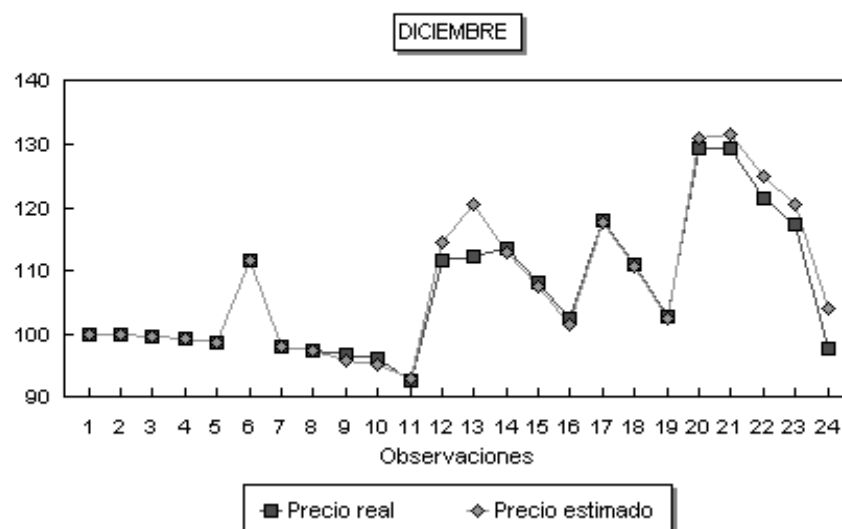
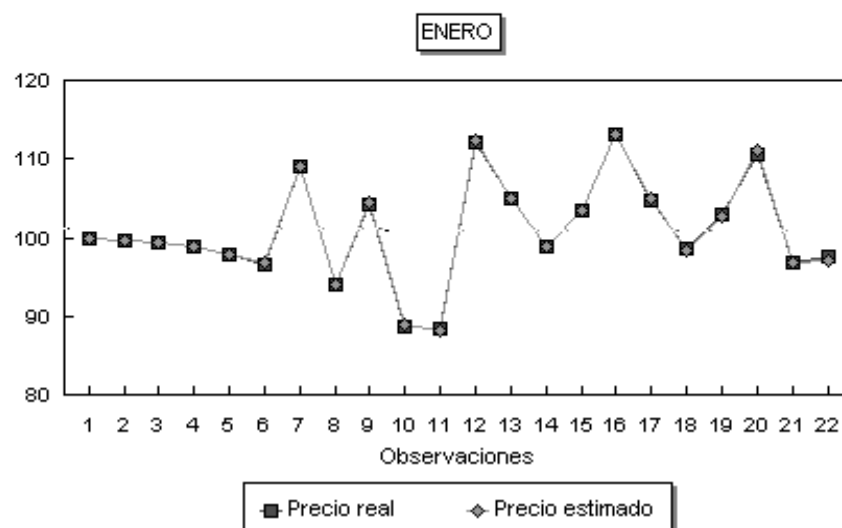


GRÁFICO 6  
 PRECIOS OBSERVADOS Y ESTIMADOS. AÑO 1994

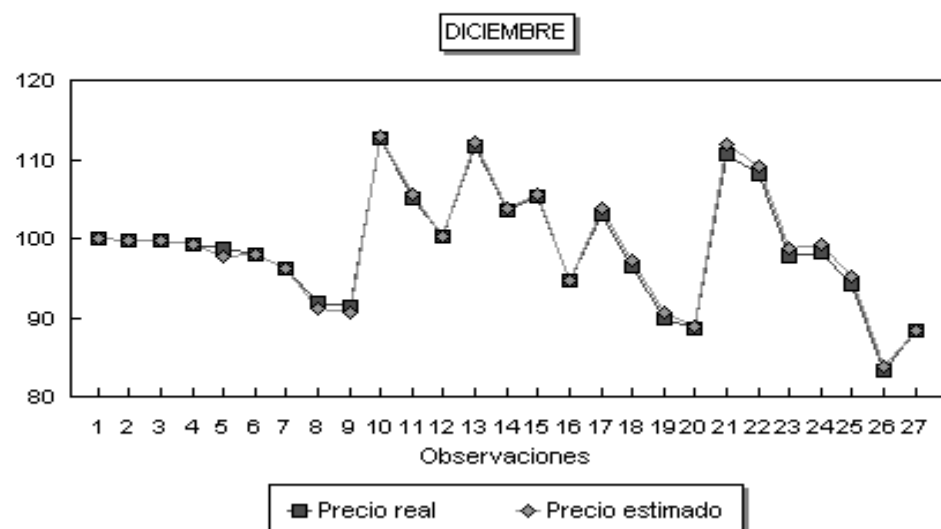
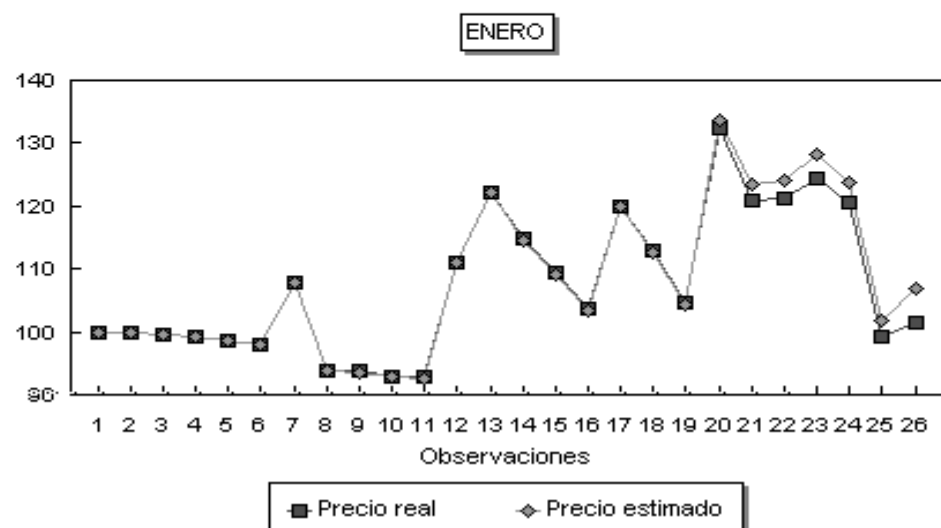
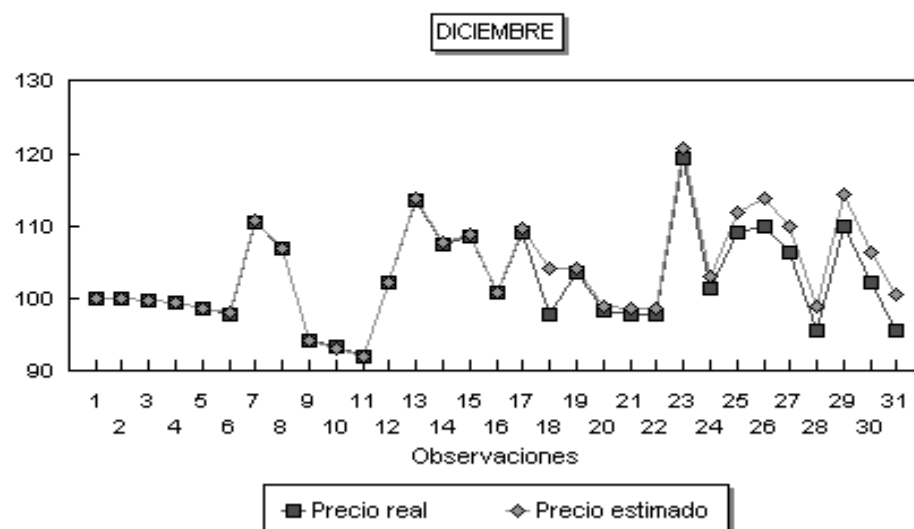
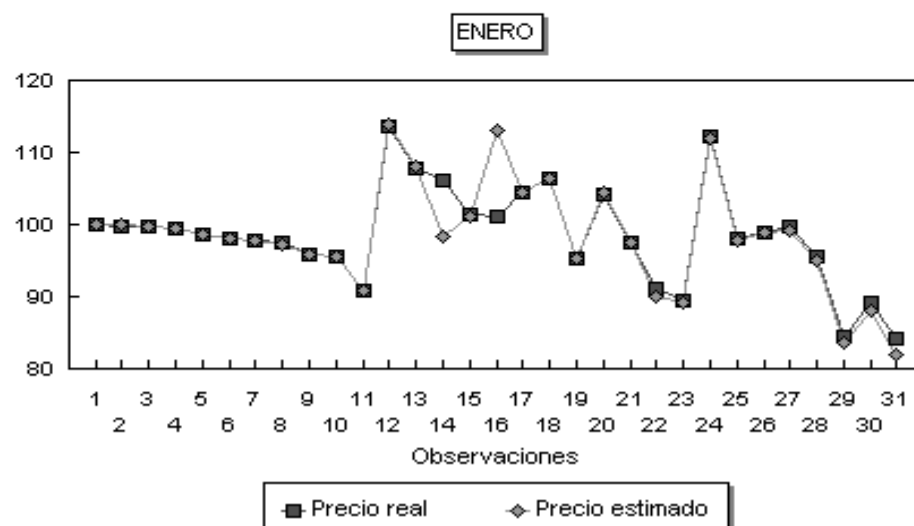
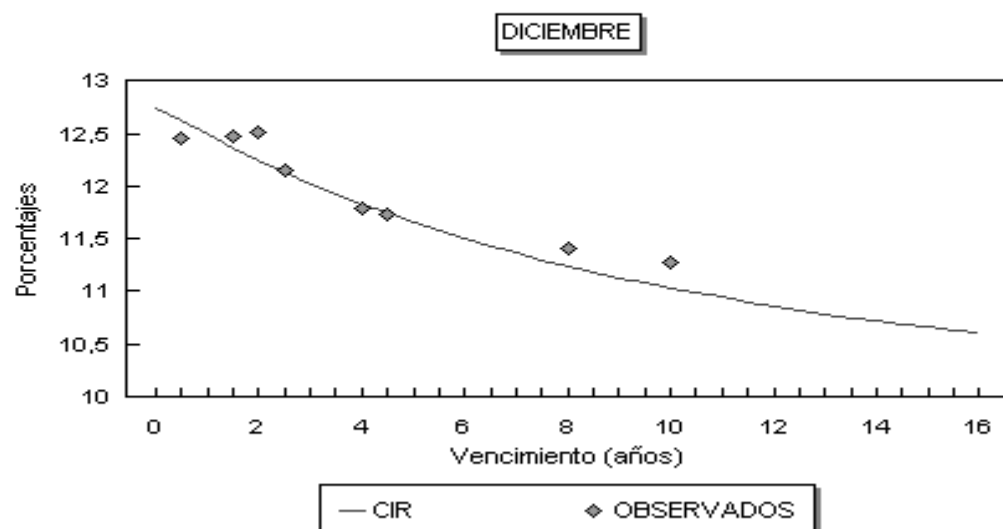
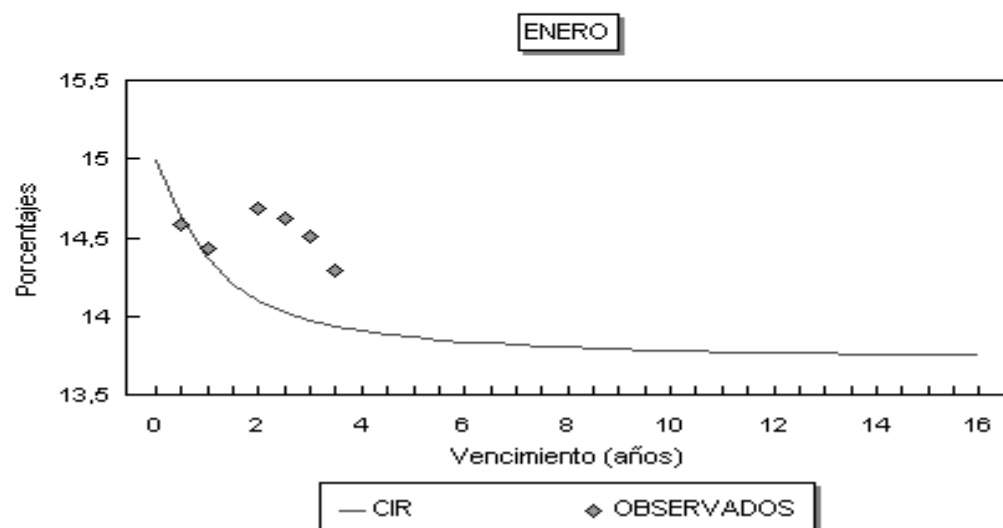


GRÁFICO 7  
 PRECIOS OBSERVADOS Y ESTIMADOS. AÑO 1995



# GRÁFICO 8

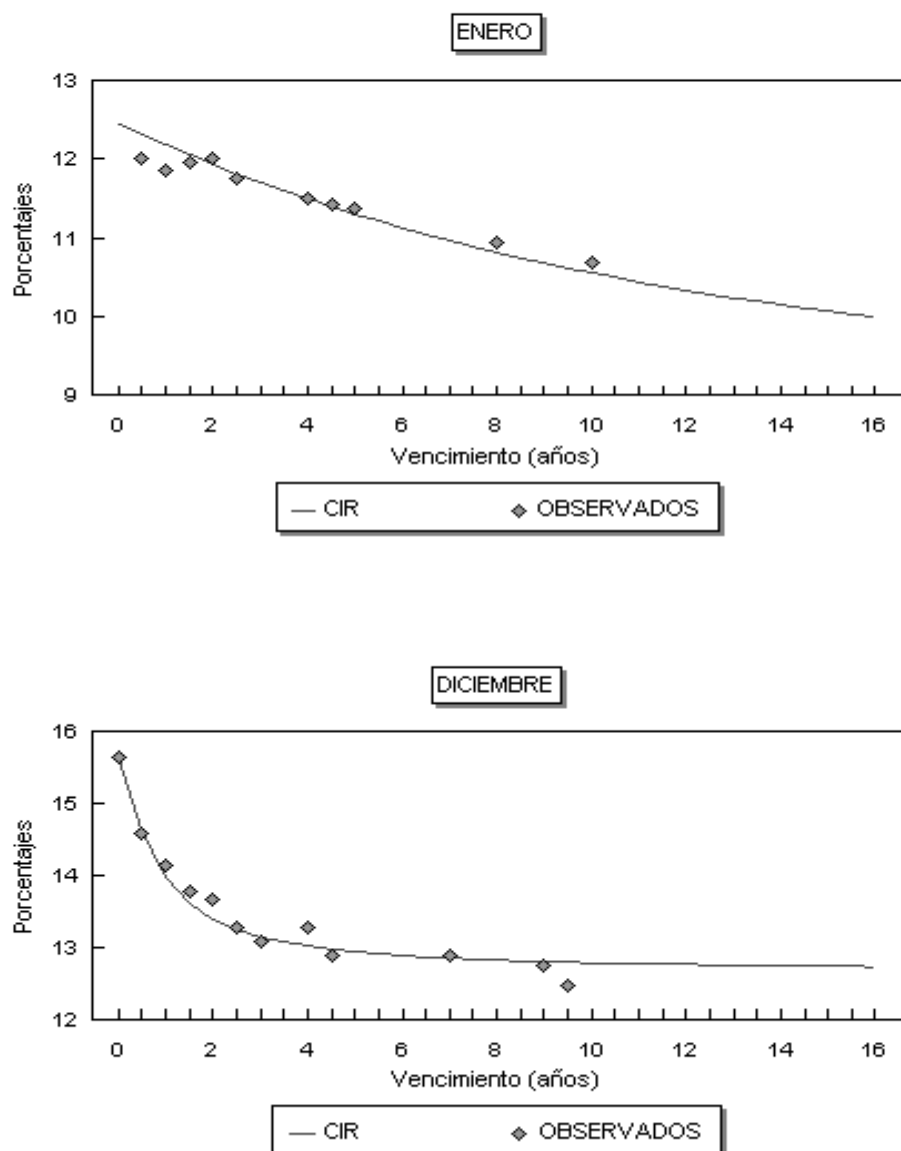
## ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS. AÑO 1991



(\*) Tipos de interés compuestos.

GRÁFICO 9

ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS. AÑO 1992

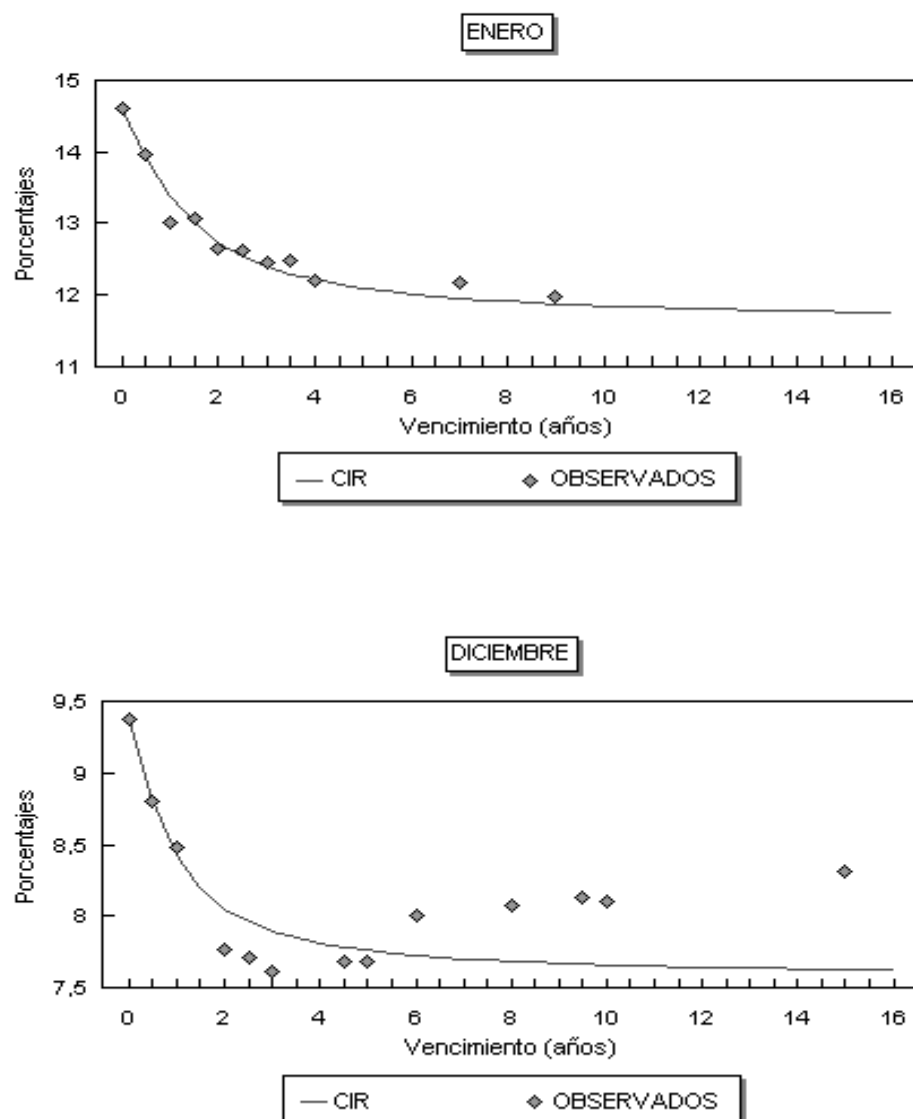


(\*)Tipos de interés compuestos.



GRÁFICO 10

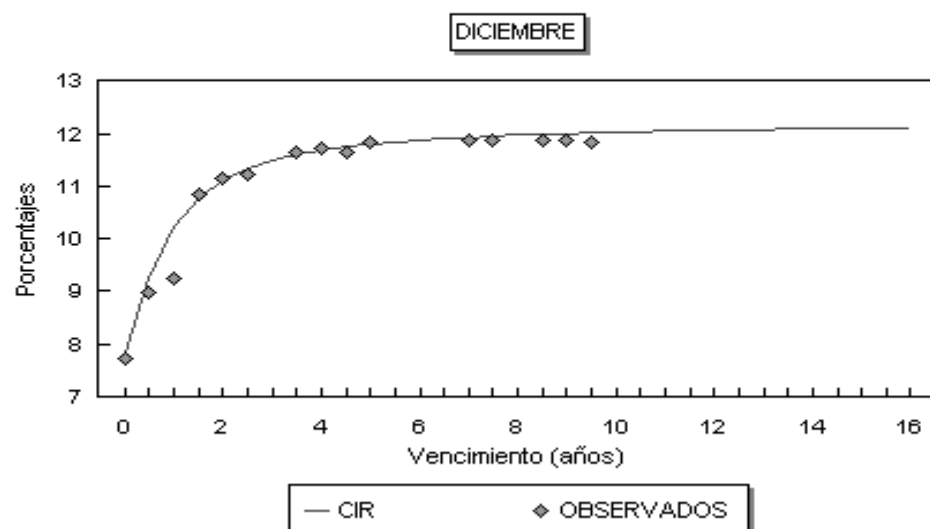
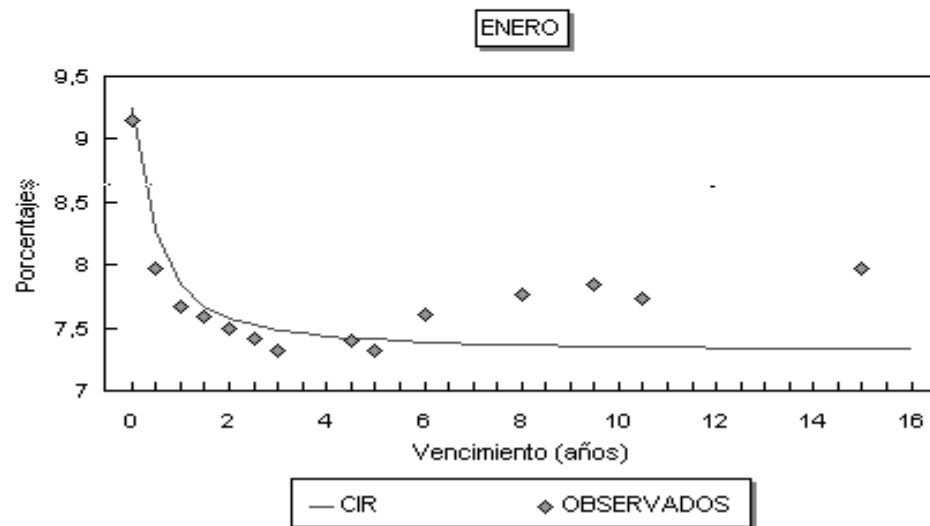
ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS. AÑO 1993



(\*)Tipos de interés compuestos.

# GRÁFICO 11

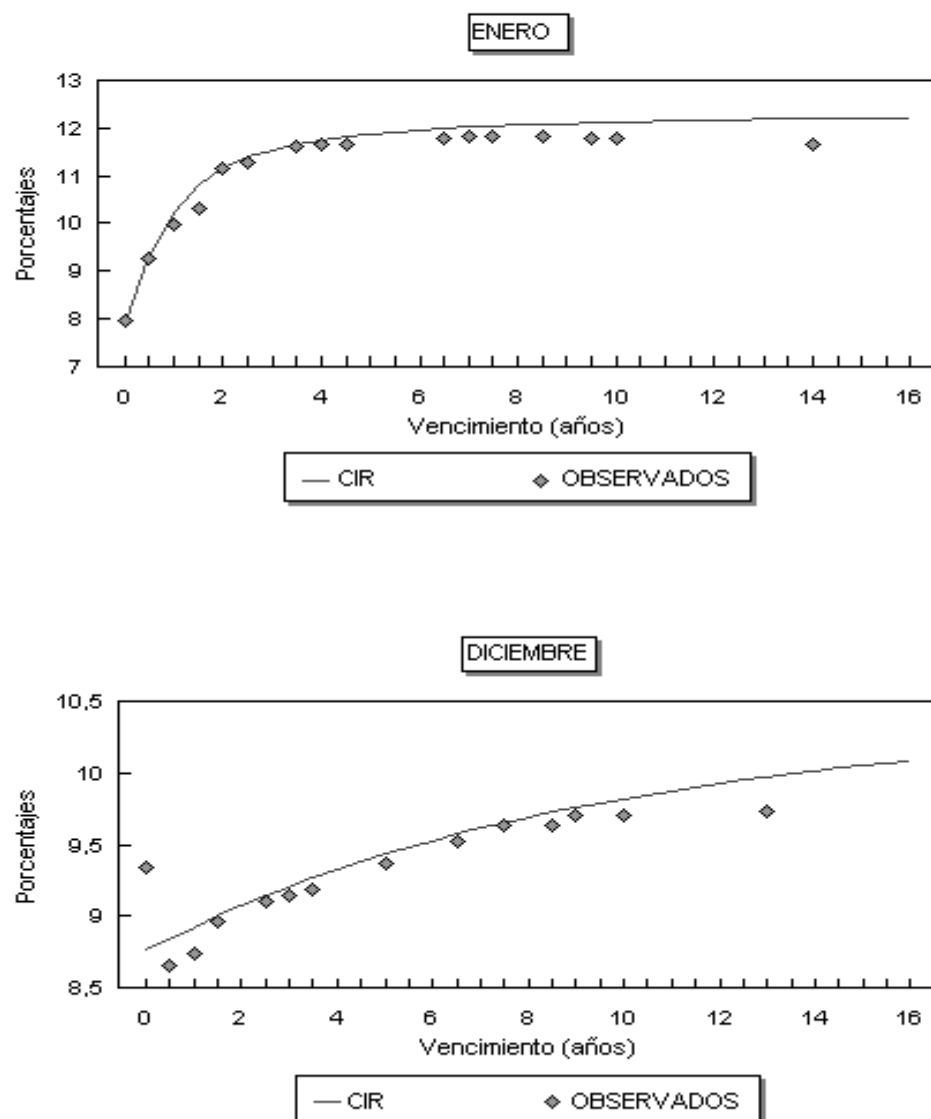
## ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS. AÑO 1994



(\*)Tipos de interés compuestos.

GRÁFICO 12

ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS. AÑO 1995



(\*)Tipos de interés compuestos.

#### 4. CONCLUSIONES

La utilidad de la ETTI abarca distintos ámbitos, desde su utilización en política monetaria, valoración de activos financieros, diseño de estrategias de inversión y cobertura, formación de expectativas, etc. No obstante, los tipos de interés al contado sólo se observan en títulos emitidos a descuento sin riesgo de insolvencia y liquidez, que en el caso español sólo se emiten para vencimientos inferiores al año<sup>13</sup>. Ello conlleva la necesidad de obtener la ETTI por algún método de estimación. Para ello es necesario contar con un mercado que sea suficientemente líquido para no introducir en la estimación sesgos causados por la dificultad de encontrar contrapartida. Esta es la razón por la cual el período para el que se estima la ETTI comienza en 1991 puesto que con anterioridad a este año el mercado español de deuda pública no puede considerarse suficientemente líquido para garantizar una ETTI estimada sin excesivas dificultades.

La estimación de la ETTI por el modelo de equilibrio general de CIR se ha realizado con datos temporales y con datos de corte transversal y a continuación se detallan las principales conclusiones que pueden destacarse.

La estimación del proceso continuo del tipo de interés instantáneo mediante una aproximación discreta de la ecuación diferencial utilizando, como proxy del tipo de interés instantáneo sin riesgo, la serie histórica de un tipo de interés a corto plazo, ha permitido llegar a las siguientes conclusiones:

1. Durante el período 1989-1995 se produce un cambio estructural en la dinámica del tipo de interés a corto plazo que afecta a su valor de largo plazo y a su volatilidad.

2. La estimación del precio de mercado del riesgo por el método SURE lleva a obtener un coeficiente negativo y significativo lo cual implica que a lo largo del período considerado (1989-1995) ha existido una prima positiva rechazándose, por tanto, la hipótesis de las expectativas e indicando la preferencia de los inversores por el corto plazo.

La estimación con datos temporales de la ETTI puede ser adecuada si el objetivo es la obtención de sus determinantes pero no si el objetivo es estimar el precio de cualquier activo financiero en un momento determinado del tiempo. Con datos temporales se obtienen unos determinados valores de los parámetros del modelo para todo el período temporal considerado de forma que se está suponiendo implícitamente que la ETTI tiene la misma forma funcional a lo largo de todo el período. Con datos de corte transversal se obtiene la serie temporal de los parámetros estimados de forma que, en cada momento, la ETTI presenta una forma funcional diferente. Por esta razón parece más adecuada la estimación de corte transversal de los parámetros dado que la ETTI es cambiante en el tiempo. Así pues se ha llevado a cabo la estimación del modelo de CIR con datos de corte transversal y las conclusiones que se pueden derivar son:

1. El modelo de equilibrio de CIR se ajusta bien a los datos y por tanto dicha modelización es adecuada para explicar la formación de precios en el mercado español de deuda. Las razones sobre las que se basa la anterior afirmación son:

---

<sup>13</sup>Desde el 28 de abril del presente año se emiten también letras a 18 meses.

a) Comparando la suma de los residuos al cuadrado media con la obtenida por Nuñez (1995) a través de tres modelos de la corriente inductiva se puede concluir que el ajuste del modelo de CIR es bueno.

b) Los gráficos de los valores observados y estimados evidencia que se trata de un modelo que se ajusta bien a los datos de la variable dependiente, aunque, no obstante, ajusta peor en las observaciones de títulos de mayor vencimiento.

c) La estimación de corte transversal ha permitido estimar el tipo de interés instantáneo observándose un cambio significativo que puede fecharse en abril de 1993 en conformidad con lo observado con los tipos de interés efectivos.

d) El tipo de interés a largo plazo estimado ha estado situado, hasta marzo de 1994, por debajo del tipo de interés instantáneo indicando que la ETTI presenta pendiente negativa (curva invertida) mientras que a partir de abril de 1994 el tipo a largo plazo se sitúa por encima del instantáneo con lo que la pendiente de la ETTI presenta pendiente positiva. Estos resultados son acordes con la evidencia empírica.

e) La variabilidad estimada del tipo de interés instantáneo es mayor en los períodos en que se ha producido turbulencias en los mercados financieros internacionales como ocurrió en el segundo semestre de 1992 tras el referéndum danés sobre el Tratado de Maastrich y el primer semestre de 1993 en el que los mercados financieros y cambiarios internacionales fueron objeto de importantes ataques especulativos.

2. La estimación del modelo CIR es muy no lineal, los parámetros  $\phi_1$  y  $\phi_2$  están altamente relacionados, y su estimación ha presentado problemas de identificación indicando que la forma funcional está sobreparametrizada. Ello ha obligado a tener que fijar el valor del parámetro  $\phi_3$  para poder estimar los otros dos. Por tanto, la estructura temporal, en el período considerado, no es lo suficientemente complicada para aprovechar la flexibilidad del modelo de CIR. Ello no excluye que en otros períodos y en otros países la ETTI puede ser lo suficientemente complicada para ser explicada por la flexibilidad que implica la forma funcional del modelo de CIR.

3. Es un modelo complejo respecto al cálculo lo cual lo hace poco atractivo frente a otros modelos más sencillos de estimar y que presentan también un elevado grado de ajuste.

## APÉNDICE 1. Conceptos matemáticos

Una función spline polinomial de orden  $q$ ,  $s(x)$  definida sobre un intervalo  $[a,b]$  con nudos internos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es una función tal que si  $0 \leq i \leq n$  y  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ , entonces  $s(x) = p_i(x)$  donde  $p_i(x)$  es un polinomio de grado no mayor que  $q$ . Además los polinomios  $P_1(x), \dots, P_n(x)$ , se ajustan conjuntamente de tal modo que  $s(x)$  es dos veces diferenciable a través del intervalo  $(a,b)$ .

Un proceso estocástico es una variable que se desarrolla en el tiempo de una forma que es por lo menos en parte aleatoria.

Un proceso difusión es un proceso estocástico en tiempo continuo.

Un proceso Wiener, también llamado movimiento Browniano (Brownian Motion) es un proceso estocástico en tiempo continuo con tres importantes propiedades.

1. Es un proceso de Markov, es decir, la distribución de probabilidad de los valores futuros del proceso dependen únicamente de sus valores corrientes y no de sus valores pasados u otra información corriente.
2. Tiene incrementos independientes, es decir, la distribución de probabilidad de los cambios del proceso sobre un intervalo de tiempo es independiente de cualquier otro intervalo temporal.
3. Los cambios en el proceso sobre un intervalo temporal,  $w(s) - w(t)$ , se distribuyen como una normal, con media cero y varianza que incrementa linealmente con el tiempo.

Si  $w(t)$  es un proceso Wiener, dado un  $\Delta t$  infinitesimal se puede representar el incremento del proceso Wiener en tiempo continuo,  $dw$ , por la ecuación diferencial estocástica:

$$dw = \varepsilon \sqrt{dt} \quad (A1.1)$$

donde  $\varepsilon_t$  tiene media cero y varianza la unidad, de forma que  $E(dw) = 0$  y  $\sigma^2 = E\{(dw)^2\} = dt$ .

Una ecuación diferencial estocástica tal y como se utiliza en el modelo de CIR se entiende de la siguiente forma: Sea  $z(t)$  un proceso estocástico  $m$ -dimensional el cual satisface el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$dz = a(z, t)dt + b(z, t)dw \quad (A1.2)$$

donde  $a(z,t)$  es un vector  $m \times 1$  y  $b(z,t)$  es una matriz  $n \times n$ , y  $w(t)$  es un proceso Wiener  $n$ -dimensional. Una solución de este sistema con posición inicial  $z(t)$  es una solución del sistema de ecuaciones integrales:

$$z(s) = z(t) + \int_t^s a(z(u), u) du + \int_t^s b(z(u), u) dw(u) \quad (A1.3)$$

donde la última integral es definida en el sentido de Ito. Por otro lado,  $a$  y  $b$  son medibles en  $[t, t'] \times \mathbb{R}^m$  y satisfacen la siguiente condición de crecimiento de Lipschitz:

1) Existe una constante  $k_1$  tal que para todo  $(z,s)$  en  $[t, t'] \times \mathbb{R}^m$ :

$$|a(z, s)| \leq k_1(1 + |x|) \text{ y } |b(z, s)| \leq k_1(1 + |x|) \quad (A1.4)$$

2) Para algún límite  $Q \subset \mathbb{R}^m$  existe una constante  $k_2$  posiblemente dependiente de  $Q$  y  $s$ , tal que para todo  $z, y \in Q$  y  $t \leq s \leq t'$ :

$$\begin{aligned} |a(z, s) - a(y, s)| &\leq k_2 |z - y| \\ |b(z, s) - b(y, s)| &\leq k_2 |z - y| \end{aligned} \quad (A1.5)$$

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ananthanarayanan, A.L. y E.S. Schwartz (1980): “Retractable and extendible bonds: the Canadian experience”, *Journal of Finance*, vol. XXXV, no. 1, marzo, pág. 31-47.
- Black, F. y M. Scholes (1973): “The pricing of options and corporate liabilities”, *Journal of Political Economy*, vol. 81, no. 3, mayo-junio, pág. 637-654.
- Brennan, M.J. y E.S. Schwartz (1979): “A continuous time approach to the pricing of bonds”, *Journal of Banking and Finance* 3, pág. 135-155.
- (1980): “Conditional predictions of bond prices and return”, *Journal of Finance*, vol. XXXV, no. 2, mayo, pág. 405-419.
- (1980): “Analyzing convertible bonds”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 15, pág. 907-929.
- (1982): “An equilibrium model of bond pricing and a test of market efficiency”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. XVII, no. 3, septiembre, pág. 301-329.
- Brown, S.J. y P.H. Dybvig (1986): “The empirical implication of Cox, Ingersoll, Ross theory of the term structure of interest rates”, *Journal of Finance*, vol. XLI, no. 3, july, pág. 617-632.
- Buse (1970): “Expectations, prices, coupons and yields”, *Journal of Finance*, septiembre, 1970, pág. 809-818.
- Caks (1977): “The coupon effect on yield on Maturity”, *Journal of Finance*, vol. 32, no. 1, marzo, pág. 103-115.
- Carr, J.L., P.J. Halpern y J.S. McCallum (1974): “Correcting the yield curve: a re-interpretación of the duration problem”, *The Journal of Finance*, septiembre, pág. 1287-1294.
- Chambers, D. R., W. T. Carleton y D. W. Waldman (1984): “A new approach to estimation of the term structure of interest rates”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 19, no. 3, septiembre, pág. 233-252.
- Chan, K.C., G.A. Karolyi, F.A. Longstaff y A.B. Sanders (1992): “An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate”, *Journal of Finance*, pág. 1209-1227.
- Chulsoon, K. (1975): “Expectations, prices, coupons and yields: comment”, *The Journal of Finance*, septiembre, vol. XXX, no.4, pág. 1137-1142.
- Contreras, D. y E. Navarro (1993): “The use of exponential splines for the estimates for the intertemporal structure of the interest rates in the Spanish market”, *Asset Meeting*, Barcelona.
- Cox, J.C., J.E. Ingersoll y S.A. Ross (1981): “A re-examination of traditional hypotheses about the term structure of interest rates”, *Journal of finance*, vol. XXXVI, no. 4, septiembre, pág. 769-799.
- Cox, J.C., J.E. Ingersoll y S.A. Ross (1985a): “An intertemporal general equilibrium model of asset prices”, *Econometrica*, vol. 53, no. 2, marzo, pág. 363-384.



- Cox, J.C., J.E. Ingersoll y S.A. Ross (1985b): "A theory of the term structure of interest rates", *Econometrica*, vol. 53, no. 2, marzo, pág. 385-407.
- Díaz del Hoyo, J.L. y A.J. Prado Domínguez (1995): "Los Fras como guías de las expectativas del mercado sobre tipos de interés", Banco de España. Servicios de Estudios. Documento de Trabajo, no. 9511.
- Dothan, L.U. (1978): "On the term structure of interest rates", *Journal of Financial Economics*, no. 6 pág. 59-69.
- Duffie, D., y L.G. Epstein (1992): "Stochastic differential utility", *Econometrica*, vol. 60, no.2, marzo, pág. 353-394.
- Durand, D. (1942): "Basic yields of Corporate Bonds, 1900-1942", *National Bureau of Economic Research*, Technical Paper 3, New York.
- Ezquiaga, I. (1991): *El mercado español de deuda del Estado: estructura y formación de precios*, Ariel Economía.
- Ezquiaga, I., J.R. Jara e I. Gómez (1994): "Una metodología para la estimación de la curva de tipos cupón-cero y su aplicación al mercado español", *Moneda y Crédito*, no. 199, pág. 157-195.
- Fisher, M., D. Nychka y Zervos (1995): "Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines", *Finance and Economics*, Discussion Series no. 95-1, Board of Governors of the Federal Reserve System, enero 1995.
- Heath, D., R. Jarrow y A. Merton (1992): "Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation", *Econometrica*, vol. 60, no. 1, enero, pág. 77-105.
- Hopwell, M.H. y G.G. Kaufman (1973): "Bond price volatility and term to maturity: A generalized especification", *The Amercian Economic Rewiew*, septiembre, pág. 749-753.
- Langtieg, T.C. (1980): "A multivariate model of the term structure", *Journal of Finance*, vol. XXXV, no. 1, marzo, pág. 71-97.
- Livingston, M. y J. Caks (1977): "A 'Duration' fallacy", *Journal of Finance*, vol. XXXII, no.1, marzo, pág. 185-187
- Longstaff, F.A. (1989): "A nonlinear general equilibrium model of the term structure of interest rates", *Journal of Financial Economics*, 23, pág. 195-224.
- Longstaff, F.A. y E.S. Schwartz (1992): "Interes rate volatility and the term structure: a two-factor general equilibrium model", *Journal of Finance*, vol. XLVII, no. 4, septiembre, pág. 1259-1282.
- Lucas, R.E (1978): "Asset prices in an exchange economy", *Econometrica*, no. 46,V pág. 1426-1446.
- Majnoni G. (1994): "An empirical evaluation of one versus two factor model of the term structure of interest rate: the Longstaff and Schwartz and the CIR models", Journées internationales le finances, Tunis, 23-24-25 de junio, 1994. Universite de droit, d'économie et de gestion. Tunis III.

- McCulloch, J.H. (1971): "Measuring the term structure of interest rates", *The Journal of Business*, vol. XLIV, enero, pág. 19-31.
- (1975): "The tax-adjusted yield curve", *The Journal of Finance*, vol. XXX, no.3, junio, pág. 811-830.
- Merton (1973a): "Theory of rational option pricing", *The Bell Journal of Economics and Management Science*, no. 4, pág. 141-183
- (1973b): "An intertemporal capital asset pricing model", *Econometrica*, no. 41, pág. 867-887.
- Nelson, C.R. y A. F. Siegel (1987): "Parsimonious modeling of yield curves", *Journal of Business*, 1987, vol. 60, no. 4, pág. 473-489.
- Nuñez, S.(1995): "Comparación y elección entre métodos alternativos de estimación de la estructura temporal de los tipos de interés para el caso español", II Jornadas de Economía Financiera, vol. II, 6 de junio, 1995. Fundación BBC, Bilbao.
- (1995): "Estimación de la estructura temporal de los tipos de interés para el caso español", *Boletín Económico del Banco de España*, mayo 1995, pág. 59-67.
- Pearson, N.D. y T.S. Sun (1994): "Exploiting the conditional density in estimating the term structure: an application to the Cox, Ingersoll and Ross model", *Journal of Finance*, vol. XLIV, no. 4, septiembre, pág. 1279-1304.
- Platten, Y (1994): "General equilibrium and the term structure of interest rates: a two-factor model", Journées internationales le finances, Tunis, 23-24-25 de junio, 1994. Universite de droit, d'économie et de gestion. Tunis III.
- Richard, S.F. (1978): "An arbitrage model of the term structure of interest rates", *Journal of Economics*, 6, pág. 33-57.
- Schaefer, S.M. (1981): "Measuring a tax specific term structure of interest rates in the market for British Government Securities", *Economic Journal*, no. 91, junio, pág 415-438.
- Schaefer, S.M. y E. S. Schwartz (1987): "Time-dependent variance and the pricing options", *Journal of Finance*, vol. XLII, no. 5, pág. 1113-1128.
- (1984): "A two-factor model of the term structure: an approximate analytical solution", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 19, no. 4, diciembre, pág. 413-424.
- Serrat, A. (1990): *Modelización de la estructura intertemporal de tipos de interés en equilibrio general*. Documento de trabajo no. 9006, septiembre. Centro de Estudios Monetarios y Financieros.
- Shea, G.S. (1984): "Pitfall in smoothing interest rate term structure data: equilibrium models and spline approximation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, septiembre, vol. 19, no. 3, pág. 253-269.
- (1985): "Interest rate term structure estimation with exponential splines. A note", *Journal of Finance*, vol. XL, no. 1, marzo, pág 319-325.

Svensson, L.E. (1994): *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994*, WP no. 4871, NBER, septiembre.

Vasicek, O. (1977): “An equilibrium characterization on the term structure”, *Journal of Financial Economics*, no.5, pág. 177-178.

Vasicek, O. y H.G. Fong (1982): “Term structure modeling using exponential splines”, *Journal of Finance*, vol. 37, no. 2, mayo, pág. 339-356.